



מכללת אורט כפר-סבא

מבני נתונים ויעילות אלגוריתמים

תרגיל מס' 3

פתרו את השאלות הבאות. יש לסיים את התרגיל עד יום א' (28.9).

שאלה 1

נתונים מספר קטעי קוד, אשר בכל אחד מהם גודל הקלט הוא n . קבעו לכל אחד מהם את סיבוכיות זמן הריצה שלו (תוך שימוש בסימון Θ). אין צורך להוכיח את קביעתכם, אלא רק לצרף נימוק משכנע. בכל אחד מקטעי הקוד, הביטויים $S1$, $S2$ מציינים הוראות פשוטות, שלא משפיעות על ערכו של אף משתנה אחר, ואשר ביצוען אורך משך זמן קבוע $\Theta(1)$.

קטע ב'

```
c = d = 10;
while (c < n) {
    S1;
    c *= d;
}
```

קטע ד'

```
b = 3;
while (b < n+6) {
    a = n;
    while (a > 0)
        a = a - n/9;
    b = b * b * b * b;
}
```

קטע א'

```
x = n*n;
y = n;
while (x > y) {
    x -= 100;
    y += 20;
}
```

קטע ג'

```
x = 1;
while (x < n) {
    for (i = n; i > 0; i--) {
        y = n;
        while (y) {
            y /= 5;
            S1;
        }
        S2;
    }
    x += n/5;
}
```

שאלה 2

א. ממשו את הפונקציה שכותרתה:

```
int linear_search (int a[], int n, int num)
```

הפונקציה תקבל מערך a של מס' שלמים (לאו דווקא חיוביים), שגודלו n , ותחפש את המספר num במערך בעזרת האלגוריתם לחיפוש סדרתי (לינארי) שלמדנו בכיתה. אם המספר מופיע במערך, היא תחזיר את המיקום (האינדקס) של אחד המופעים שלו. אם הוא לא מופיע במערך, היא תחזיר -1.

ב. ממשו את הפונקציה שכותרתה:

```
int binary_search (int a[], int n, int num)
```

הפונקציה תקבל מערך a **ממוין בסדר עולה** של מס' שלמים (לאו דווקא חיוביים), שגודלו n , ותחפש את המספר num במערך בעזרת האלגוריתם לחיפוש בינארי שלמדנו בכיתה. אם המספר מופיע במערך, היא תחזיר את המיקום (האינדקס) של אחד המופעים שלו. אם הוא לא מופיע במערך, היא תחזיר -1.

ג. האם תוכלו להדגים מערך a ומספר num שעבורו הפונקציה מסעיף א' תבצע פחות צעדים מאשר הפונקציה מסעיף ב'? האם זה מוכיח כי הפונקציה מסעיף א' יעילה יותר מאשר הפונקציה מסעיף ב'? הסבירו את תשובתכם.

שאלה 3

א. כתבו אלגוריתם מילולי (להקפיד שיהיה חד-משמעי, פשוט, ברור ומנוסח היטב! כזה שיהיה קל מאוד לתרגמו לתכנית מחשב בשפת C, או לכל שפת תכנות אחרת, אם נרצה בכך) המקבל מערך של מספרים. האלגוריתם, שזמן ריצתו הוא $\Theta(n)$, יציג כפלט את שני האיברים במערך שההפרש ביניהם הוא הגדול ביותר.

ב. כתבו אלגוריתם מילולי הפותר את אותה בעיה אלגוריתמית כמו בסעיף א', אולם כעת מובטח לכם כי המערך ממוין. האם תוכלו לכתוב אלגוריתם יעיל יותר מאשר האלגוריתם שכתבתם בסעיף הקודם?

ג. האם השיפור שהשגתם בסיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם מסעיף ב', לעומת האלגוריתם מסעיף א', הוא שיפור בקבוע או שיפור בסדר גודל?

שאלה 4

נתון מערך **ממוין** a המכיל n מספרים שלמים. ידוע שכל מספר הנמצא במערך מופיע פעם אחת בלבד. כתבו פונקציה בשפת C שזמן ריצתה $\Theta(1)$, המקבלת כפרמטרים את המערך a ואת גודלו n , ועונה לשאלה הבאה: האם קיים מספר שלם k **שלא מופיע** במערך, כך שהוא מקיים את התנאי $a[0] < k < a[n-1]$? אם כן – הפונקציה תחזיר 1. אחרת – הפונקציה תחזיר 0.

שאלה 5

נתון מערך a הממוין בסדר עולה, והמכיל n מספרים שלמים שונים זה מזה. כתבו אלגוריתם מילולי (להקפיד שיהיה חד-משמעי, פשוט, ברור ומנוסח היטב! כזה שיהיה קל מאוד לתרגמו לתכנית מחשב) הבודק האם קיים אינדקס $0 \leq i < n$ כך שמתקיים השוויון: $a[i] = i$. האלגוריתם יחזיר את i במידה והוא קיים, ואם אין i כזה – אז האלגוריתם יחזיר את הערך -1 . סיבוכיות זמן הריצה הנדרשת היא $\Theta(\log n)$.

הדרכה: נצלו את העובדה שהמערך ממוין, והיעזרו ברעיון של חיפוש בינארי. אם אינכם בטוחים לגבי הפתרון שלכם, נסו ליישמו בסביבת העבודה, ולהריץ אותו עבור דוגמאות קלט שונות.

שאלה 6 (רשות)

בתרגיל הקודם, הוכחתם את הנוסחה לסכום חזקות שלישיות. נוסחה שימושית נוספת, היא הנוסחה לסכום חזקות ריבועיות:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$$

הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, את נכונות הנוסחה.

שאלה 7 (רשות)

הוכיחו את הזהות הבאה:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)^2$$

הדרכה: היעזרו בנוסחאות שהוכחתם בתרגיל הקודם (הנוסחה לסכום חזקות שלישיות, והנוסחה לסכום סדרה חשבונית).

שאלה 8 (רשות)

בשיעור האחרון, השתמשנו בנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

הוכיחו את נכונות הנוסחה.

שאלה 9 (רשות)

כזכור, סדרה הנדסית תיקרא **מתכנסת** אם המנה הקבועה שלה q מקיימת $|q| < 1$. בשיעור האחרון, השתמשנו בנוסחה לסכום אינסוף איברי סדרה הנדסית מתכנסת:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

הוכיחו את נכונות הנוסחה.

שאלה 10

מרצה אחסן את ציוני הסטודנטים במערך grades שגודלו n. למורת רוחו, הוא גילה שהציונים נמוכים, ולכן החליט לנרמל את הציונים כך שהציון הגבוה בכיתה יהיה 100. הוא כתב את הפונקציה הבאה שמבצעת זאת:

```
1 void normalize_grades (int grades[], int n)
2 /* טענת כניסה: grades הוא מערך של n שלמים */
3 /* טענת יציאה: הציונים במערך נורמלו */
4 {
5     int i, max=grades[0];
6     for (i = 1; i < n; i++)
7         if (grades[i] > max)
8             max = grades[i];
9     for (i = 0; i < n; i++)
10         grades[i] = (int)(grades[i]/(float)max * 100);
11 }
```

א. הניחו שמריצים את הפונקציה על מחשב שבו:

1. פעולת חיבור אורכת 1 מיקרו-שנייה;
2. פעולת השמה אורכת 1 מיקרו-שנייה;
3. בדיקת תנאי אורכת 2 מיקרו-שניות;
4. המרת טיפוס (casting) אורכת 3 מיקרו-שניות;
5. פעולת כפל אורכת 4 מיקרו-שניות;
6. פעולת חילוק אורכת 5 מיקרו-שניות.

תנו ביטוי מדויק לפונקציית זמן הריצה של הקוד normalize_grades.

ב. מהו סדר הגודל של פונקציית זמן הריצה (במונחים של Θ)?

ג. המרצה מעוניין לשנות את קטע הקוד כך שזמן הריצה יקטן. הוא מבחין כי הפעולה ה"בזבזנית" ביותר מבחינת משך הזמן שהיא אורכת, היא פעולת החילוק. הניחו כי במחשבו של המרצה יש זיכרון פנוי בשפע, וכי אין בעיה להגדיר משתנים נוספים.

הציעו שיפור ל-normalize_grades.

ד. האם השיפור שהצעתם בסעיף ג' הוא שיפור בקבוע (improvement by factor) או שיפור בסדר גודל (order-of-magnitude improvement)? הסבירו.

שאלה 11

נתון מערך A המכיל n מספרים ממשיים שכולם שונים זה מזה. ערך x נקרא **מקסימום מקומי** של המערך A אם מתקיים אחד מהבאים:

$$x = A[0] > A[1] \quad .(i)$$

$$x = A[n-1] > A[n-2] \quad .(ii)$$

קיים אינדקס $0 < i < n-1$ שעבורו מתקיים $x = A[i]$, וכן מתקיים –

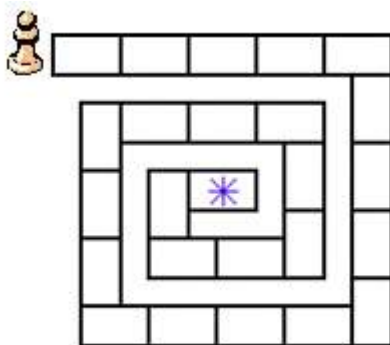
$$A[i-1] < A[i] > A[i+1]$$

נכנה איבר בשם **מקסימום גלובלי** אם הוא מקסימום מקומי, וגם גדול יותר מכל שאר האיברים במערך שהם מקסימום מקומי.

- מהי סיבוכיות זמן הריצה של אלגוריתם יעיל המוצג מקסימום גלובלי במערך?
- כתבו אלגוריתם מילולי המחזיר את מיקומו של מקסימום מקומי כלשהו במערך, כך שזמן הריצה שלו יהיה $\Theta(\log n)$.

שאלה 12 (רשות)

ספירלה משורטטת על דף, ולאורכה 25 תחנות במרחקים שווים זו מזו; התחנה הראשונה מסומנת בקצה החיצוני והתחנה האחרונה (ה-25) בקצה הפנימי של הספירלה.



שני שחקנים משחקים אחד נגד השני. כל שחקן בתורו מקדם את הכלי בתחנה אחת לכל הפחות ובשש תחנות לכל היותר. השחקן שמציב את הכלי בתחנה האחרונה מנצח במשחק.

- מהי האסטרטגיה לניצחון במשחק? האם כדאי להיות השחקן הפותח במשחק?
- מהי האסטרטגיה לניצחון במשחק שבו n תחנות? כתבו תכנית המקבלת כקלט את מספר התחנות n (מס' שלם בין 10 ל-1000), מחליטה האם להיות השחקן הפותח, ומשחקת מול המשתמש כך שתנצח תמיד.
- נניח שחוקי המשחק שונים, וכעת בכל תור ניתן לקדם לכל היותר בחמש. אילו שינויים צריך לעשות בתכנית שכתבתם בסעיף ב'?
- נניח שחוקי המשחק שונים, וכעת בכל תור ניתן לקדם לכל הפחות בשתיים. אילו שינויים צריך לעשות בתכנית שכתבתם בסעיף ב'?
- נניח שחוקי המשחק שונים, והמפסיד הוא השחקן שמציב את הכלי בתחנה האחרונה. אילו שינויים צריך לעשות בתכנית שכתבתם בסעיף ב'?

שאלה 13

א. ממשו את הפונקציה שכותרתה:

```
int find_min (int a[], int start, int n)
```

הפונקציה תקבל מערך a של מס' שלמים (לאו דווקא חיוביים), שגודלו n . המס' השלם $start$ הוא אינדקס במערך, והוא מקיים $0 \leq start < n$. הפונקציה תחזיר את האינדקס של האיבר המינימלי במערך, בתחום שבין $start$ ל- $n-1$.

ב. ממשו את הפונקציה שכותרתה:

```
void swap (int *a, int *b)
```

הפונקציה תקבל מצביעים לשני משתנים מטיפוס שלם, ותבצע החלפה ביניהם.

ג. ממשו את הפונקציה שכותרתה:

```
void selection_sort (int a[], int n)
```

הפונקציה ממיינת בסדר עולה מערך a המכיל n מספרים שלמים, בעזרת האלגוריתם למיון בחירה (Selection Sort). היעזרו בפונקציות שכתבתם ובאלגוריתם שנלמד בכיתה.

ד. איזה שינוי עליכם לעשות בפונקציה המממשת את האלגוריתם למיון בחירה, אותה כתבתם בסעיף ג', ובפונקציות העזר מסעיפים א'-ב', על מנת שהיא תמיין את המערך בסדר יורד, במקום בסדר עולה?

