



מכללת אורט כפר-סבא

מבני נתונים ויעילות אלגוריתמים

תרגיל מס' 13

פתרו את השאלות הבאות. יש לסיים את התרגיל עד יום א' (4.1).

שאלה 1

השתמשו במשפט האב ומצאו חסמים אסימפטוטיים בעבור נוסחאות הנסיגה האלה:

א. $T(n) = 16T(n/4) + n$

ב. $T(n) = 16T(n/4) + n^2$

ג. $T(n) = 4T(n/4) + n$

ד. $T(n) = 2T(n/4) + 5n$

ה. $T(n) = T(n/2) + 1$

ו. $T(n) = 4T(n/4) + 1$

ז. $T(n) = 2T(n/4) + n \log n$

ח. $T(n) = 2T(n/2) + n \log n$

ט. $T(n) = 4T(n/2) + n^2 \log n$

שאלה 2

הסבירו מדוע:

א. משפט 1 הוא מקרה פרטי של משפט האב.

ב. משפט 2 הוא מקרה פרטי של משפט האב.

ג. מקרה ב' של משפט האב הוא מקרה פרטי של מקרה ד' של משפט האב.



שאלה 3

נתונות ארבע נוסחאות נסיגה:

$$T(n) = T(n/2) + \Theta(1) \quad .a$$

$$T(n) = T(n/2) + \Theta(n) \quad .b$$

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(1) \quad .c$$

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) \quad .d$$

ונתונות שלוש בעיות אלגוריתמיות, הנפתרות על-ידי אלגוריתמים רקורסיביים בשיטת הפרד-ומשול (Divide-and-Conquer):

1. חיפוש בינארי במערך ממוין

2. מציאת מקסימום במערך לא ממוין

3. מיון-מיזוג של מערך לא ממוין

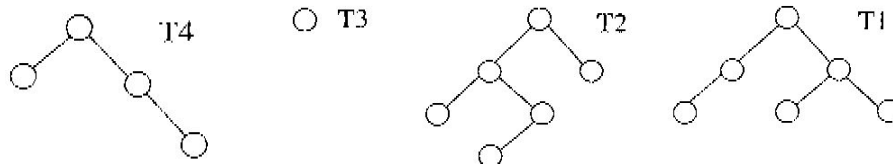
א. התאימו לכל בעיה אלגוריתמית את נוסחת הנסיגה המתאימה לה מבין ארבע נוסחאות הנסיגה שברשימה.

ב. איזו נוסחת נסיגה אינה מתאימה לאף אחד מהאלגוריתמים הנ"ל?

ג. פתרו בעזרת משפטים שלמדנו את ארבע נוסחאות הנסיגה.

שאלה 4

עץ בינארי ייקרא **עץ ימין-שמאל** אם לכל צומת בעץ אשר יש לו בן ימני, יש גם בן שמאלי. לדוגמא: העצים T1, T2, T3 הם עצי ימין-שמאל, והעץ T4 אינו עץ ימין-שמאל.



כתבו פונקציה בשפת C המקבלת עץ בינארי t, ומחזירה 1 אם הוא עץ ימין-שמאל, ו-0 אם לא. השתמשו בפעולות הממשק על טנ"מ (ADT) מסוג עץ בינארי שהגדרנו ב-tree.h.

שאלה 5

נתון עץ בינארי T שהצמתים שלו מכילים ערכים מסוג תו. אם סורקים את העץ T בסדר תחילי (preorder) אזי הערכים המתקבלים מביקור בצמתים (משמאל לימין): X A I O N Y T D S. אם סורקים את העץ T בסדר תוכי (inorder) אזי נקבל (משמאל לימין): I N O A X D T S Y. שרטטו את העץ T, ורשמו את סדר הערכים המתקבל מביקור בצמתים בסדר סופי (postorder).

שאלה 6

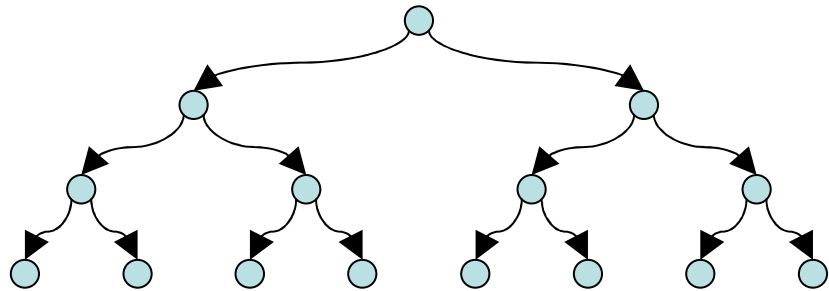
- א. נגדיר עץ בינארי מלא (full binary tree) בתור עץ בינארי, אשר בו לכל צומת פנימי (צומת שאינו עלה) יש בדיוק שני בנים. האם תוכלו לשרטט דוגמה לעץ בינארי מלא המכיל שבעה איברים?
- ב. נגדיר עץ בינארי שלם (complete binary tree) בתור עץ בינארי, אשר לכל העלים בו יש את אותו העומק (כלומר – נמצאים באותה הרמה), ולכל צומת פנימי יש בדיוק שני בנים. יש המכנים עץ כזה גם בשם עץ בינארי מושלם (perfect binary tree). האם תוכלו לשרטט דוגמה לעץ בינארי שלם המכיל שבעה איברים?
- ג. האם כל עץ בינארי שלם הוא גם עץ בינארי מלא? האם כל עץ בינארי מלא הוא גם עץ בינארי שלם?
- ד. האם עץ ביטוי חשבוני הוא בהכרח עץ בינארי מלא?

שאלה 7 (רשות)

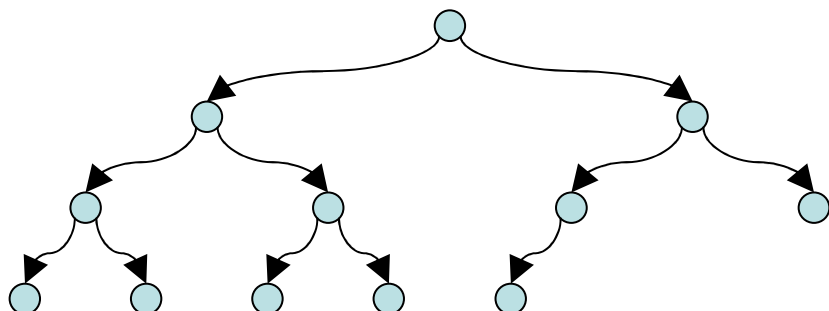
- נתון עץ בינארי שלם, אשר גובהו הוא h , המכיל n צמתים, מתוכם L הם עלים.
- א. הוכיחו כי $n = 2^{h+1} - 1$ (נבטא את מס' הצמתים באמצעות גובה העץ).
- ב. הוכיחו כי $n = 2L - 1$ (נבטא את מס' הצמתים באמצעות מספר העלים).
- ג. הוכיחו כי $L = 2^h$ (נבטא את מס' העלים באמצעות גובה העץ).

שאלה 8

בשאלה 6 הגדרנו עץ בינארי שלם (complete binary tree) בתור עץ בינארי אשר כל עליו נמצאים באותה הרמה, ולכל צומת פנימי יש שני בנים. להלן דוגמה:

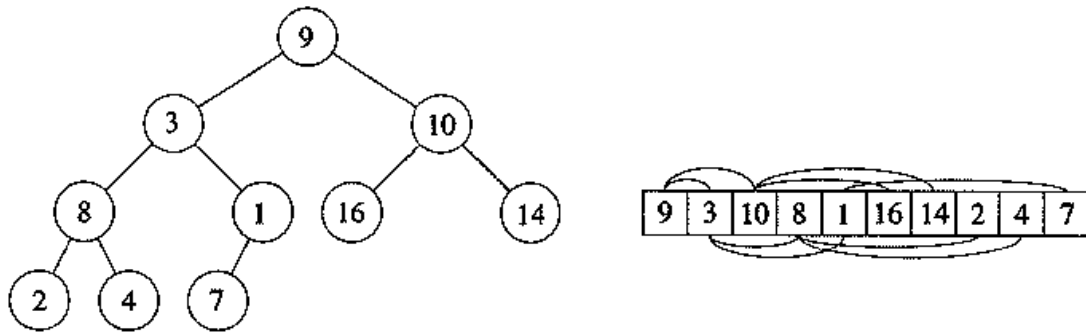


נגדיר עץ בינארי כמעט שלם (almost complete binary tree) בתור עץ בינארי שמלא לחלוטין בכל רמותיו, פרט אולי לאחרונה, המלאה משמאל ועד לנקודה מסוימת. להלן דוגמה:



א. האם עץ בינארי כמעט שלם עשוי להיות עץ בינארי שלם?
 ב. נתון עץ בינארי כמעט שלם שגובהו h , המכיל n צמתים. מהו הערך המינימלי ומהו הערך המקסימלי עבור n ?

ג. ניתן לייצג עץ בינארי כמעט שלם באופן יעיל באמצעות מערך, באופן הבא: שורש העץ יאוחסן בתא שהאינדקס שלו 0. בהינתן קודקוד בעץ, המאוחסן בתא שהאינדקס שלו i , הן השמאלי של הקודקוד יאוחסן בתא שהאינדקס שלו $2i+1$, הן הימני יאוחסן בתא שהאינדקס שלו $2i+2$, ואביו יאוחסן בתא שהאינדקס שלו $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$. לדוגמא:



שרטטו דוגמא לעץ בינארי כמעט שלם המכיל 6 קודקודים, ואת המערך המייצג אותו.

