



מכללת אורט כפר-סבא

מבני נתונים ויעילות אלגוריתמים

תרגיל מס' 17

פתרו את השאלות הבאות. יש לסיים את התרגיל עד יום ד' (4.2).

שאלה 1

גרף דו-צדדי (bipartite graph) הינו גרף $G = (V, E)$ שבו קבוצת הקודקודים V מתחלקת לשתי קבוצות $V = V_1 \cup V_2$ שהן זרות זו לזו $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, ועבור כל זוג קודקודים x, y בגרף, אם הם שייכים לאותה הקבוצה (כלומר, אם $x, y \in V_1$ או $x, y \in V_2$), אז לא קיימת ביניהן קשת.

- א. האם גרף נטול קשתות (כלומר, גרף שבו כל קודקוד הוא קודקוד מבודד) הוא דו-צדדי?
- ב. לפניך טענה: "גרף G הוא דו-צדדי אם ורק אם ניתן לצבוע את קודקודיו בשחור ולבן, כך שקודקודים שכנים יצבעו בצבעים שונים". האם הטענה נכונה או לא נכונה? נמקו.
- ג. השלימו: בגרף דו-צדדי, אורכו של מסלול המתחיל בקודקוד $x \in V_1$ ומסתיים בקודקוד $y \in V_2$ הוא תמיד מספר _____, ואורכו של מסלול המתחיל בקודקוד $x \in V_1$ ומסתיים בקודקוד $z \in V_1$ הוא תמיד מספר _____.

שאלה 2 (מבחינה חיצונית אביב תשס"ד – 2004)

לפניך חמש טענות על גרפים.

קבע בעבור כל אחת מהטענות אם היא נכונה או לא נכונה.

רשום במחברתך את מספרי הטענות בלבד, וליד כל מספר רשום נכון או לא נכון.

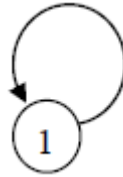
- 5. נתון גרף לא מכוון $G = (V, E)$ עם פונקציית משקל w על הקשתות. אם הקשת (u, v) היא בעלת המשקל המקסימלי מכל הקשתות של G , אז אין עץ פורש מינימלי המכיל את (u, v) .



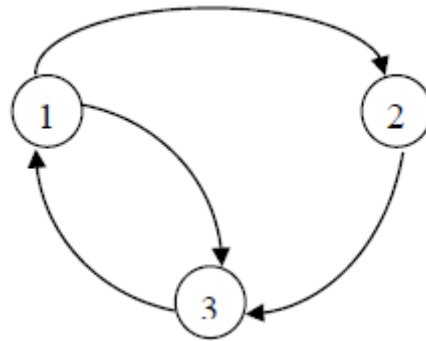
שאלה 3 (ממבחן של משרד החינוך)

נגדיר סדרה של גרפים מכוונים באופן הבא:

- הגרף G_n מוגדר עבור n אי-זוגי בלבד.
- בגרף יש n צמתים המסומנים במספרים שלמים מ-1 עד n .
- מכל צומת שמספרו אי-זוגי יוצאות קשתות אל שני הצמתים שמספריהם גדולים מערך הצומת ב-1 וב-2.
- מכל צומת שמספרו זוגי יוצאת קשת אל הצומת שמספרו גדול ממנו ב-1.
- מהצומת שמספרו n יוצאת קשת אל הצומת שמספרו 1.



לדוגמא: הגרף G_1 הוא:



והגרף G_3 הוא:

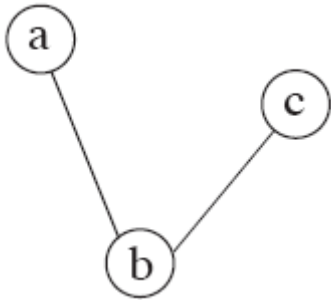
- שרטטו את הגרפים G_5 ו- G_7 .
 - מה תהיה דרגת הצומת n בגרף G_n ? נמקו את תשובתכם.
 - מהו מספר הקשתות בגרף G_n ? נמקו את תשובתכם.
 - לפניך הטענה: "בגרף G_n קיים מסלול אוילר".
- a. קבעו האם הטענה מתקיימת לגבי כל אחד מהגרפים G_1, G_3, G_5, G_7 . אם הטענה מתקיימת – רשמו את המסלול, ואם הטענה אינה מתקיימת – הסבירו מדוע.
- b. קבעו האם הטענה נכונה באופן כללי בגרף G_n .



שאלה 4

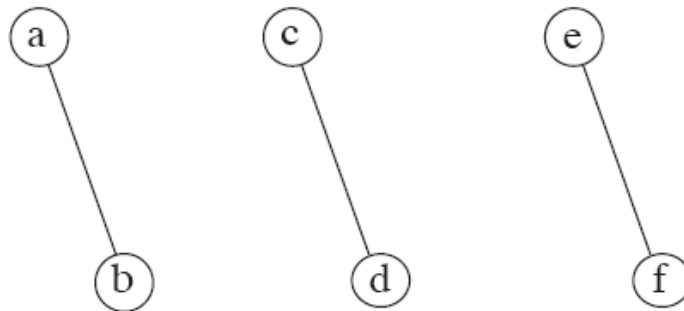
כזכור, גרף G נקרא פשוט, אם אין בו לולאות ואין בו קשתות מרובות (אין יותר מקשת אחת בין שני קודקודים). בעבור גרף פשוט G שקבוצת הקודקודים שלו היא V וקבוצת הקשתות שלו היא E , נגדיר את הגרף המשלים \bar{G} בתור הגרף שקבוצת הקודקודים שלו אף היא V , וקבוצת הקשתות שלו היא הקבוצה \bar{E} . לכל זוג קודקודים u ו- v בקבוצה V , הקשת (u,v) נמצאת בקבוצה \bar{E} , רק אם היא לא נמצאת בקבוצה E . כלומר: $\bar{E} = \{(u,v) \mid (u,v) \notin E\}$.

בעבור כל אחד מהגרפים הפשוטים הבאים, שרטט את הגרף המשלים שלו:



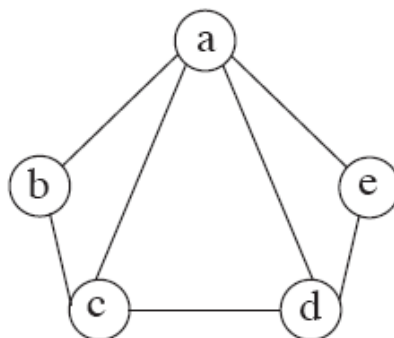
(i). הגרף $G_1 = (V_1, E_1)$, כאשר $V_1 = \{a,b,c\}$ ו- $E_1 = \{(a,b), (b,c)\}$.

(ii). הגרף $G_2 = (V_2, E_2)$, כאשר $V_2 = \{a,b,c,d,e,f\}$ ו- $E_2 = \{(a,b), (c,d), (e,f)\}$.



(iii). הגרף $G_3 = (V_3, E_3)$, כאשר $V_3 = \{a,b,c,d,e\}$ ו-

$E_3 = \{(a,b), (a,c), (b,c), (c,d), (a,d), (d,e), (a,e)\}$.

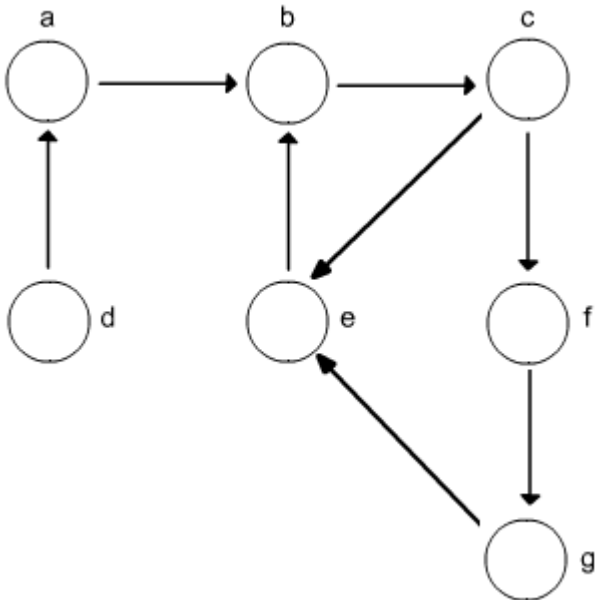


שאלה 5

א. נתון הגרף השלם K_n . תארו את הגרף המשלים \bar{K}_n .

ב. יהי G גרף פשוט כלשהו. האם בהכרח מתקיים $\bar{\bar{G}} = G$ (כלומר, האם בהכרח הגרף המשלים של הגרף המשלים שווה לגרף המקורי)?

שאלה 6



נתון הגרף המכוון הבא $G = (V, E)$:

א. כתבו את קבוצת הקודקודים V ,

ואת קבוצת הקשתות E .

ב. הריצו את האלגוריתם לסריקה לעומק

תחילה (DFS) על הגרף G , החל מהקודקוד

a . הניחו כי האלגוריתם סורק את שכניו של

קודקוד נתון לפי סדר אלפביתי (לדוגמא:

כשבוחנים את שכניו של הקודקוד c , אז

הקודקוד e ייסרק לפני f , וכו'). תארו את

חותמות הזמן (discovered ו-finished).

ג. סווגו את הקשתות שהתקבלו במהלך הרצת האלגוריתם בסעיף ד', לארבעת הסוגים

שלמדנו בכיתה: קשתות עץ (tree edges), קשתות אחורה (back edges), קשתות קדימה

(forward edges) וקשתות חוצות (cross edges).

(את תשובותיכם לסעיפים ב' ו-ג' תוכלו לבדוק בקישור הבא, המוביל לאתר לימודי בעברית

בנושא תורת הגרפים: http://math.eitan.ac.il/graph_theory/020_Scan/026_Scan_Q.htm)

שאלה 7

לפניכם אלגוריתם המקבל כקלט גרף מכוון, ובודק האם יש בו מעגל מכוון:

האם-קיים-מעגל-מכוון? (G)

צעד 1: הרץ את האלגוריתם DFS על הגרף G .

צעד 2: אם בעקבות ריצת האלגוריתם התגלו קשתות אחורה (back edges), אזי – החזר

”אמת”; אחרת – החזר ”שקר”.

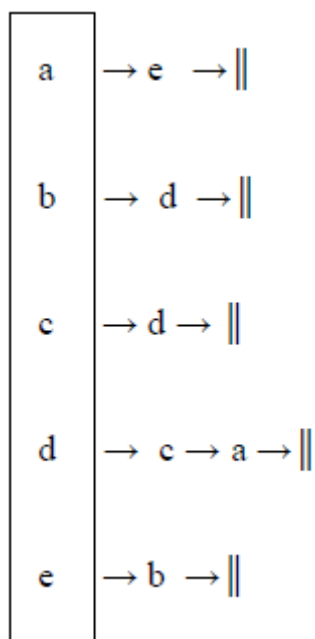
א. מה יחזיר האלגוריתם עבור הגרף מהשאלה הקודמת? האם בגרף זה יש מעגל מכוון?

ב. מהי סיבוכיות זמן הריצה של אלגוריתם זה? הסבירו את תשובתכם.



שאלה 8 (ממבחן של משרד החינוך)

נתון גרף מכיוון $G = (V, E)$ המיוצג על-ידי רשימת הסמיכויות הבאה :



- א. מפעילים את האלגוריתם **חיפוש לעומק (DFS)** על הגרף הנתון, החל מקודקוד a. מהו ערכו של $f[d]$ (המציין את מועד סיום הטיפול בקודקוד d)?
- ב. השלם את המשפט, כך שייווצר היגד נכון: הגרף הנתון הוא...
1. לא גרף דו-צדדי.
 2. גרף דו-צדדי, $V_1 = \{b, c\}$, $V_2 = \{a, d, e\}$, והוא מכיל מעגל פשוט באורך זוגי.
 3. גרף דו-צדדי, $V_1 = \{a, b, c\}$, $V_2 = \{d, e\}$, והוא מכיל מעגל פשוט באורך אי-זוגי.
 4. גרף דו-צדדי, $V_1 = \{a, b, c\}$, $V_2 = \{d, e\}$, והוא מכיל מעגל פשוט באורך זוגי.

הערה: המושג "גרף דו-צדדי" מוגדר בשאלה מס' 1 בתרגיל זה.

שאלה 9

- א. פתרו את שאלה 5 מהבחינה החיצונית של שנת תשס"ב (2002).
- ב. פתרו את שאלה 4 מהבחינה החיצונית של שנת תשס"ז (2007).

שאלה 10

פתרו את נוסחאות הנסיגה הלינאריות ההומוגניות הבאות:

- א. $f(n) = 3f(n-1) + 4f(n-2)$, עם תנאי ההתחלה $f(0) = 0$, $f(1) = 5$.
- ב. $f(n) = 3f(n-2) - 2f(n-1)$, עם תנאי ההתחלה $f(0) = 2$, $f(1) = 3$.
- ג. $T(n) = T(n-1) + 6T(n-2)$, עם תנאי ההתחלה $T(0) = 5$, $T(1) = 0$.

שאלה 11

א. בתרגיל מס' 14 בתכנות מערכות בשפת C הכרתם פעולה הנקראת 'כפל מטריצות', וראיתם כי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הסטנדרטי לכפל מטריצות היא $\Theta(n^3)$.

ב-1969 פירסם המתמטיקאי הגרמני וולקר שטראסן (Volker Strassen) אלגוריתם יעיל לביצוע כפל מטריצות, המשיג שיפור בסדר גודל לעומת האלגוריתם הסטנדרטי. האלגוריתם רקורסיבי, וזמן הריצה שלו נתון ע"י נוסחת הנסיגה: $T(n) = 7T(n/2) + n^2$. השתמש באחד מהמשפטים שלמדתם כדי לפתור את נוסחת הנסיגה הזו. האם אכן מדובר בשיפור בסדר גודל לעומת האלגוריתם הסטנדרטי?

ב. האלגוריתם היעיל ביותר הידוע כיום לביצוע כפל מטריצות הוא אלגוריתם Coppersmith-Winograd, שפורסם ב-1990 על-ידי מדען המחשב הישראלי שמואל וינוגרד (החי כיום בארה"ב) והמתמטיקאי האמריקאי דן קופרסמית.

סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שלהם היא $\Theta(n^{2.376})$, אך עם זאת – לרוב לא משתמשים בו ביישומים מעשיים, אלא משתמשים דווקא באלגוריתם של שטראסן. מה עשויות להיות הסיבות לכך שבפועל ייתכן ונעדיף אלגוריתם שמבחינת סדר הגודל שלו הוא יעיל פחות?

