



מכללת אורט כפר-סבא

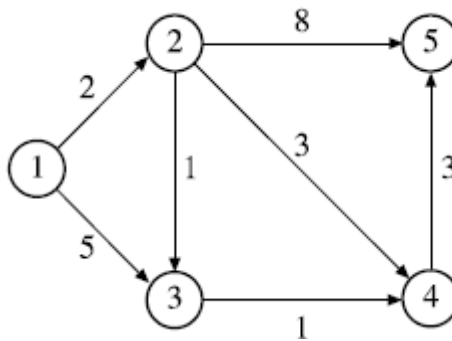
מבני נתונים ויעילות אלגוריתמים

תרגיל מס' 23

פתרו את השאלות הבאות. יש לסיים את התרגיל עד יום א' (22.2).

שאלה 1

נתונה הרשת הזאת:



הריצו את האלגוריתם של דייקסטרה על הרשת הנתונה, החל מקודקוד המקור 1, ומצאו מסלול מינימלי מקודקוד המקור ליתר הקודקודים ברשת הזאת.

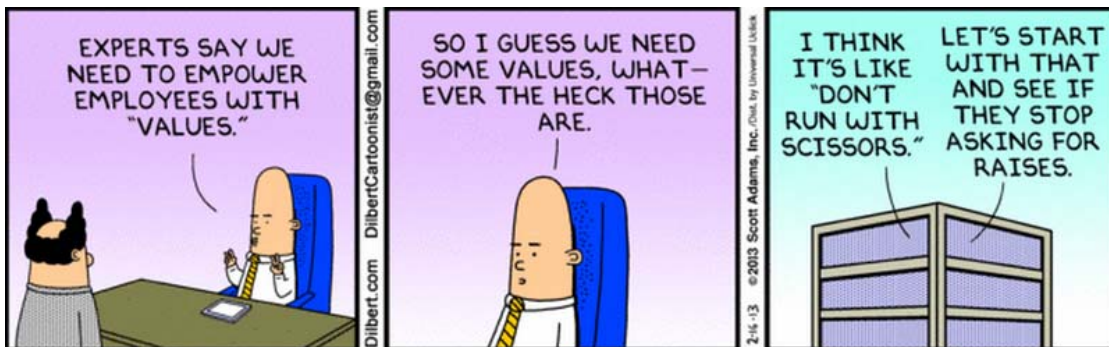
שאלה 2

נתונה פונקציית זמן הריצה של אלגוריתם מסויים, הפועל על קלט שגודלו n:

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 2$$

סיבוכיות זמן הריצה של קטע הקוד הנתון כפונקציה של n היא:

- 1. $\Theta(\log \log(n))$
- 2. $\Theta(\log n)$
- 3. $\Theta(\sqrt{n})$
- 4. $\Theta(\log^2 n)$



שאלה 3

נתון אלגוריתם המקבל כקלט גרף מכוון, ממושקל וקשיר בחוזקה $G = (V, E)$ ומחזיר TRUE אם בגרף קיים מעגל מכוון שלילי (כלומר, מעגל מכוון שסכום המשקלים על קשתותיו הוא מספר שלילי), ו-FALSE אם לא קיים בו מעגל מכוון שלילי.

האם-קיים-מעגל-שלילי? (G)

צעד 1: הרץ את אלגוריתם _____ (1) על הגרף G החל מקודקוד שרירותי,

ואחסן במשתנה הבוליאני val את הערך שהאלגוריתם מחזיר.

צעד 2: החזר את _____ (2) .

- השלימו את הביטויים החסרים באלגוריתם, הממוספרים (1) – (2).
- מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם?
- אילו שינויים תצטרכו לעשות באלגוריתם אם לא ידוע לנו מראש שהגרף G קשיר בחוזקה? תארו את האלגוריתם לאחר השינויים.

שאלה 4 (ממבחן של משרד החינוך)

לפניכם הגדרה: גשר בגרף לא מכוון וקשיר היא קשת שהסרתה הופכת את הגרף לבלתי קשיר. מהי הטענה שאינה נכונה?

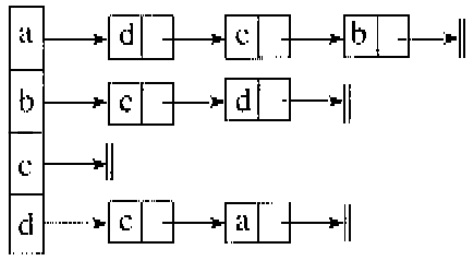
- קשת אינה גשר בגרף לא מכוון, קשיר ופשוט אם ורק אם היא נמצאת על מעגל פשוט בגרף.
- גרף לא מכוון, קשיר ופשוט ניתן לכיוון לגרף קשיר בחוזקה אם ורק אם אין בו גשרים.
- קשת בגרף מכוון היא גשר אם ורק אם הקצוות שלה נמצאים ברכיבי קשירות חזקה שונים.
- אף אחת מבין התשובות הנתונות אינה נכונה.

שאלה 5

נתונים n מפתחות שונים זה מזה, השייכים כולם לתחום $[0, n^2-1]$ (כלומר, כל המפתחות הם מספרים שלמים הגדולים או שווים ל-0, וקטנים או שווים ל- n^2-1). תארו במילים כיצד יעבוד אלגוריתם יעיל הממיין את n המפתחות. הינכם רשאים להיעזר באלגוריתמי מיון שנלמדו בכיתה.

שאלה 6 (מבחן של משרד החינוך)

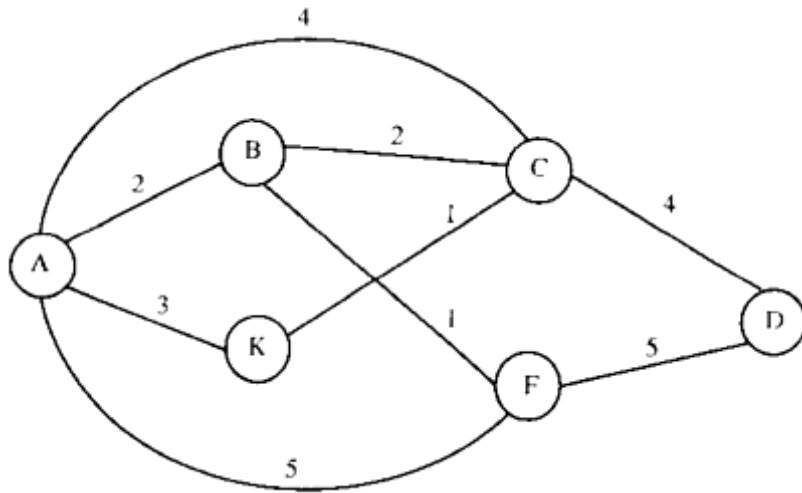
$G = (V, E)$ הוא גרף מכוון, כאשר V היא קבוצת הקדקודים בגרף ו- E היא קבוצת הקשתות בגרף. G מיוצג על ידי רשימת הסמיכויות שלפניך:



- i הפעל אלגוריתם לחיפוש לעומק (בשיטת DFS) על הגרף הנתון החל מקדקוד a. סרטט במחברתך את העץ הפורש (DFS) / היער הפורש (DFS) שהתקבל.
- ii הפעל אלגוריתם לחיפוש לעומק (בשיטת DFS) על הגרף הנתון החל מקדקוד c. סרטט במחברתך את העץ הפורש (DFS) / היער הפורש (DFS) שהתקבל.
- iii הפעל אלגוריתם לחיפוש לרוחב (בשיטת BFS) על הגרף הנתון החל מקדקוד d. סרטט במחברתך את העץ הפורש (BFS) / היער הפורש (BFS) שהתקבל.

שאלה 7

נתון הגרף G הבא:



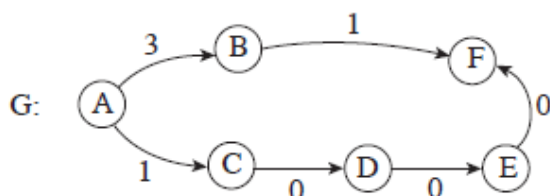
- לפניכם שלוש טענות המתייחסות לגרף G. קבעו לגבי כל אחת מהן האם היא נכונה או לא נכונה, ונמקו את קביעתכם:
1. אם נפעיל את האלגוריתם של Dijkstra על הגרף G, למציאת מסלול קצר ביותר בין הקודקודים A ו-D, אז אורך המסלול שנקבל יהיה 8.
 2. בגרף G יש לא פחות מארבעה מעגלים פשוטים באורך 4.
 3. אם נפעיל את האלגוריתם של Prim למציאת עץ פורש מינימלי בגרף G, ונבחר את הקודקוד F להיות קודקוד ההתחלה, אז משקל העץ שנקבל יהיה 10.

שאלה 8 (ממבחן של משרד החינוך)

לפניך גרף מכוון $G = (V, E)$.

V היא קבוצת הקדקודים, ו- E היא קבוצת הקשתות.

פונקציית המשקל $W: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף G .



(1) רשום במחברתך את רשימת הקדקודים במסלול הקצר ביותר מקדקוד A

לקדקוד F (כולל A ו-F).

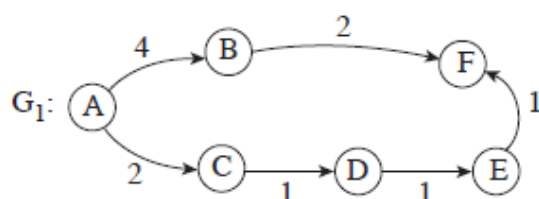
(2) יהי G_1 גרף מכוון, $G_1 = (V, E)$, המכיל את אותם קדקודים כמו הגרף G ואת

אותן קשתות, ופונקציית המשקל $W_1: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ מוגדרת באופן הזה:

לכל קשת e ב- G_1 , $W_1(e) = W(e) + t$, כאשר W היא פונקציית המשקל

של G ו- t מספר שלם וגדול מ-0.

בעבור $t = 1$ מתקבל הגרף G_1 שלפניך:



A רשום במחברתך את רשימת הקדקודים במסלול הקצר ביותר מקדקוד A

לקדקוד F (כולל A ו-F) בגרף G_1 .

(3) לפניך משפט שיש להשלימו:

רשימת הקדקודים במסלול הקצר ביותר מקדקוד A לקדקוד F בגרף G, ורשימת

הקדקודים במסלול הקצר ביותר מקדקוד A לקדקוד F בגרף G_1 הן: _____.

לפניך שלוש אפשרויות i-iii להשלמת המשפט.

העתק למחברתך את ההשלמה הנכונה, ונמק את בחירתך.

i שוות לכל t .

ii שונות לכל t .

iii יכולות להיות שוות או שונות, תלוי בערכו של t .

שאלה 9 (ממבחן של משרד החינוך)

הגרף G הוא קשיר ולא מכוון, ומוגדר על ידי $G = (V, E)$, כאשר V היא קבוצת הקדקודים בגרף ו- E היא קבוצת הקשתות בגרף. פונקציית המשקל $W: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף G .

יהיו X, Y, Z קדקודים בגרף G . נניח כי כל קשת בגרף צבועה בצבע כחול או בצבע אדום. לפניך תיאור של אלגוריתם, אשר בודק אם מבין המסלולים המורכבים מקשתות כחולות בלבד, כל המסלולים הקצרים ביותר מ- X ל- Y עוברים דרך Z . אם כן – האלגוריתם מחזיר את הערך "אמת" (TRUE). אחרת – הוא מחזיר את הערך "שקר" (FALSE). באלגוריתם חסרים 5 ביטויים המסומנים (1)-(5).

תיאור האלגוריתם

צעד 1:

נסיר מהגרף את כל הקשתות (1) ונקבל גרף חדש $G_1 = (V, E_1)$.

צעד 2:

נחשב, בעזרת האלגוריתם של דיקסטרה, את אורך המסלול הקצר ביותר מ- X ל- Y בגרף (2). נסמן את אורך המסלול הזה ב- M_1 .

צעד 3:

נסיר מהגרף G_1 את הקדקוד (3) ואת כל הקשתות המחוברות אליו, ונקבל גרף חדש $G_2 = (V_2, E_2)$.

צעד 4:

נחשב, בעזרת האלגוריתם של דיקסטרה, את אורך המסלול הקצר ביותר מ- X ל- Y בגרף (4). נסמן את אורך המסלול הזה ב- M_2 .

צעד 5:

אם (5) אזי החזר את הערך "אמת".

אחרת – החזר את הערך "שקר".

