# חידה לחימום

באדמות חולדה-לנד ישנה רשת ענפה של מחילות של חולדות. המחילות בנויות מבורות המחוברים ביניהם על-ידי קטעי-מחילה. בין כל שני בורות ישנו לכל היותר קטע-מחילה ישיר אחד. נתונה מפה של רשת קטעי-מחילה, ובה לא-מעט מעגלים. אנו אומרים שיש מעגל כאשר קיימים שני בורות המחוברים ביניהם בשני מסלולים (רצפים) זרים של קטעי-מחילה.

הוחלט להצר את תנועת החולדות ברשת, על-ידי סתימת קטעי-מחילה. המטרה היא לסתום מספר מינימאלי של קטעי-מחילה אשר ייצור מצב שברשת לא יהיו מעגלים.

עליכם לכתוב תכנית שהקלט שלה הוא מפת קטעי-המחילה (והבורות שהם מחברים), והפלט שלה הוא המספר המינימאלי של קטעי-מחילה שיש לסתום כדי ליצור מצב שבו אין אף מעגל ברשת.

הנתון הראשון בקלט הוא מספר הבורות ברשת ($5 \le N \le 50$), אשר ממוספרים מ-1 עד N. אחרי הנתון הראשון נתונה רשימה של קטעי-מחילה, אשר כל אחד מהם מתואר על-ידי זוג הבורות אותו הוא מחבר. הרשימה מסתיימת בזוג (0,0). כל בור מופיע ברשימה לפחות פעמיים. ייתכנו בורות אשר אין ביניהם מסלול של קטעי-מחילה.

לדוגמא, עבור הקלט הבא:

7 1 2 2 3 3 4 4 1 1 3 5 6 6 7 5 7 0 0

הפלט יהיה 3.

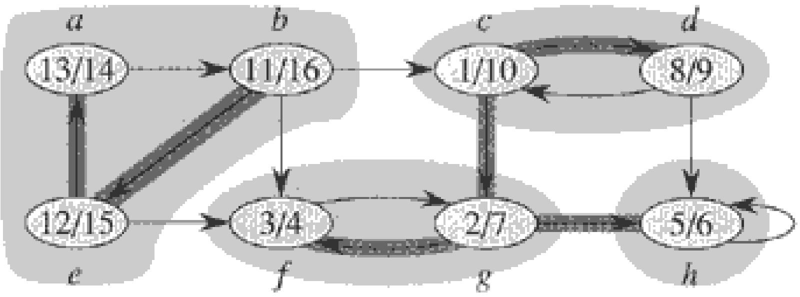
# מבני נתונים ויעילות אלגוריתמים

**(11.2.2015)**

## 1. מציאת רכיבים קשירים היטב (Strongly Connected Components)

אחד היישומים של האלגוריתם לחיפוש לעומק הוא פירוק של גרף מכוון לרכיביו הקשירים היטב. כזכור, עבור גרף מכוון $G = (V,E)$, רכיב קשיר היטב (הנקרא גם רכיב קשיר בחוזקה – רק״ח; ובאנגלית נקרא SCC – Strongly Connected Component) זו קבוצת קודקודים $U \subseteq V$ מקסימלית (גדולה ככל האפשר) כך שעבור כל זוג קודקודים u ו-v ב-U, קיים מסלול מכוון מ-u ל-v וגם מסלול מכוון מ-v ל-u. כלומר, הקודקודים u ו-v ניתנים להגעה הדדית.

אם נריץ את DFS על גרף מכוון, אז ברור ששני קודקודים ששייכים לאותו רק״ח (SCC) נמצאים על אותו עץ עומק. מאידך, ייתכנו קודקודים השייכים לאותו עץ עומק, אולם אמורים להשתייך לרק״חים שונים. לדוגמא:




באיור הנ״ל ניתן לראות את מועדי הגילוי והסיום של קודקודים בגרף מכוון, לאחר הרצת DFS. הקשתות המודגשות הן קשתות עץ (האלגוריתם בנה שני עצי עומק), והאזורים המוצללים הם הרק״חים (יש ארבעה).
לכן, הרצה אחת של DFS אינה מספיקה. איך נקבל, אם כך, את הרק״חים?

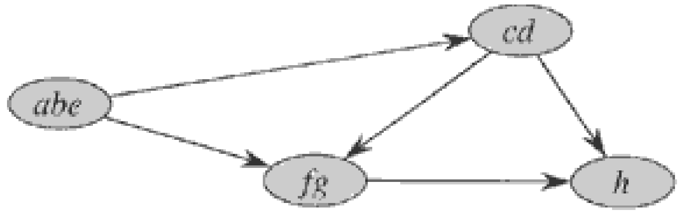
נבנה גרף הדומה ל-G, פרט לכך שכיווני הקשתות המכוונות הם הפוכים. גרף כזה יסומן $G^T$ ויקרא הגרף המשוחלף (transposed graph) של G. קבוצת הקודקודים שלו זהה לזו של G (כלומר, זו הקבוצה V), ואילו קבוצת הקשתות שלו, שתסומן $E^T$, מכילה קשת (u,v) אם ורק אם הקשת ההפוכה (v,u) נמצאת ב-E (בקבוצת הקשתות של G). פורמלית, נרשום זאת כך: $G^T = (V, E^T)$, כאשר $E^T = \{(u,v) \mid (v,u) \in E\}$.

לגרף הזה קוראים גרף משוחלף, משום שניתן לקבל אותו על-ידי ביצוע פעולת שיחלוף (transpose) על מטריצת הסמיכויות (השכנויות) המייצגת את הגרף.

כעת, נריץ את האלגוריתם DFS על הגרף המשוחלף $G^T$, כאשר בכל פעם שאנחנו צריכים לבחור בין כמה קודקודים לבנים (למשל: בלולאה בשורות 5-7 ב-DFS או הלולאה בשורות 4-7 ב-DFS-VISIT), במקום לבחור שרירותית, נבחר את הקודקוד הלבן שמועד הסיום שלו (finished), שנקבע על-ידי הרצת DFS על הגרף G, הוא הגבוה ביותר.

עצי העומק המתקבלים כתוצאה מריצה זו של האלגוריתם, מתאימים לרכיבי הקשירות בחוזקה של G.

אם נתון לנו גרף מכוון $G = (V,E)$, אז לאחר שאנו יודעים מיהם הרק״חים שלו, ניתן לבנות את גרף הרכיבים (components graph) של G. גרף זה יסומן $G^{SCC} = (V^{SCC}, E^{SCC})$ , כאשר $V^{SCC}$ מכילה קודקוד אחד עבור כל רכיב קשיר היטב ב-G, ו-$E^{SCC}$ מכילה את הקשת (u,v) אם מקודקוד ברכיב הקשיר היטב של G המתאים ל-u קיימת קשת מכוונת לקודקוד ברכיב הקשיר היטב של v. לדוגמא:

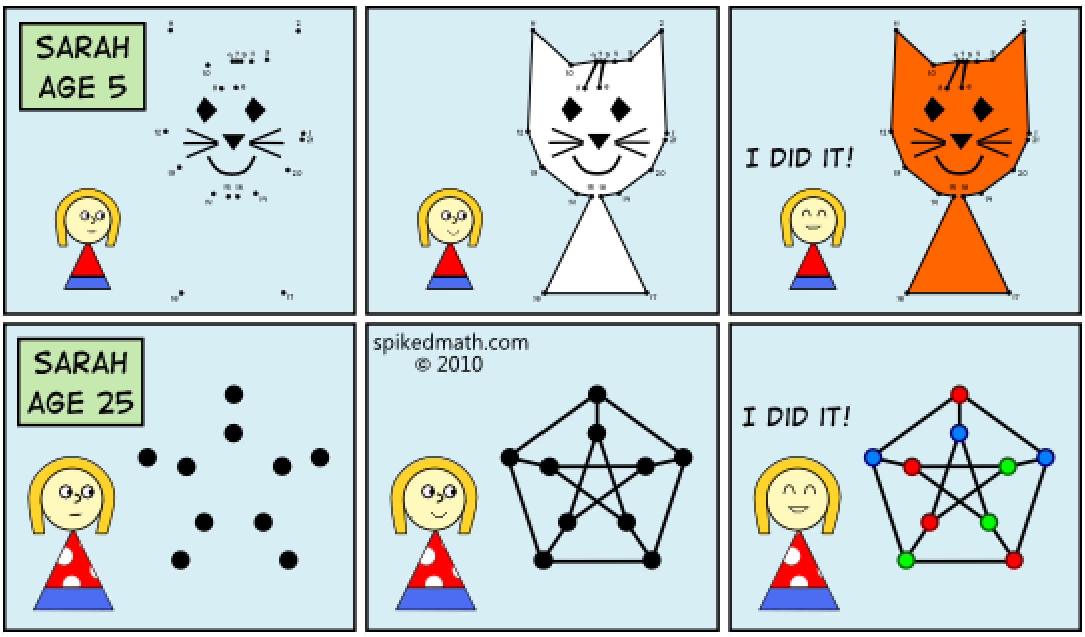



**<u>שאלה</u>**

בהינתן גרף מכוון $G = (V,E)$, מהי סיבוכיות זמן הריצה של בניית גרף הרכיבים שלו $G^{SCC} = (V^{SCC}, E^{SCC})$ ?

**<u>שאלה</u>**

הוכיחו כי גרף רכיבים $G^{SCC}$ הוא תמיד גרף מכוון ללא מעגלים (בראשי תיבות: גמ״ל. באנגלית מקובלות ראשי התיבות: DAG – Directed Acyclic Graph).



## 2. פתרון משוואות נסיגה לינאריות אי-הומוגניות

למדנו לפתור משוואת נסיגה **לינארית הומוגנית**:

$$f(n) = c_1 \cdot f(n-1) + c_2 \cdot f(n-2) + c_3 \cdot f(n-3) + ... + c_k \cdot f(n-k)$$

שנראית גם כך:

$$f(n) - c_1 \cdot f(n-1) - c_2 \cdot f(n-2) - c_3 \cdot f(n-3) - ... - c_k \cdot f(n-k) = 0$$

כעת, נרצה ללמוד לפתור גם משוואות מהצורה הבאה:

$$f(n) - c_1 \cdot f(n-1) - c_2 \cdot f(n-2) - c_3 \cdot f(n-3) - ... - c_k \cdot f(n-k) = g(n)$$

כאשר $g(n) \neq 0$ . משוואה כזו נקרא משוואת נסיגה **לינארית אי-הומוגנית**.

יש מספר דרכים לפתור משוואות נסיגה כאלו. הדרך הראשונה היא פשוטה, אך אינה מתאימה לשימוש עבור כל משוואות הנסיגה. בשיטה זו רושמים את נוסחת הנסיגה עבור n, ואז את נוסחת הנסיגה עבור n-1. מחסרים בין שתי המשוואות, ומבצעים פעולות אלגבריות כדי לקבל משוואת נסיגה לינארית **הומוגנית**, שאותה אנחנו כבר יודעים איך לפתור. שיטת פתרון זו מכונה לעיתים 'שיטת ההפרשים'.

**<u>שאלה</u>**

פתרו את נוסחת הנסיגה $T(n) = 2T(n-1) + 1$ , עם תנאי ההתחלה $T(1) = 1$ , $T(2) = 3$ .

**<u>תשובה</u>**

נעביר אגפים: $T(n) - 2T(n-1) = 1$

נציב n-1: $T(n-1)-2T(n-2) = 1$

נחסר מהמשוואה הראשונה את המשוואה השנייה, ונקבל:

$$T(n) - 3T(n-1) + 2T(n-2) = 0$$

קיבלנו משוואת נסיגה לינארית הומוגנית! נפתור אותה בשיטה המוכרת:

נציב $\alpha^i$ במקום $T(i)$, ונקבל: $\alpha^n - 3\alpha^{n-1} + 2\alpha^{n-2} = 0$ .

נצמצם ב- $\alpha^{n-2}$, ונקבל את המשוואה האופיינית: $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$ .

נפרק לגורמים: $(\alpha-1)(\alpha-2) = 0$, כלומר – הפתרונות הם: $\alpha_1 = 1$ ו- $\alpha_1 = 2$ .

לכן, צורת הפתרון היא: $T(n) = A_1 \cdot 1^n + A_2 \cdot 2^n$.

כדי לחשב את ערכם של הקבועים $A_1, A_2$ נשתמש בתנאי ההתחלה.

נציב n = 1 ונקבל: $1 = A_1 + 2A_2$, נציב n = 2 ונקבל: $3 = A_1 + 4A_2$

קיבלנו מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים, שפתרונה: $A_1 = -1, A_2 = 1$ .

לכן, הביטוי המפורש המתאר את נוסחת הנסיגה הוא: $T(n) = (-1) \cdot 1^n + 1 \cdot 2^n$

כלומר: $T(n) = 2^n - 1$, כפי שרצינו להראות.

**<u>שאלה</u>**

את סעיף ד' של שאלה 3 בבחינה החיצונית משנת תשס"ב (2002) פתרנו בעבר בעזרת שיטת האיטרציה. פתרו אותו כעת באמצעות השיטה לפתרון נוסחאות נסיגה לינאריות אי-הומוגניות.