



מכללת אורט כפר-סבא

מבני נתונים ויעילות אלגוריתמים

תרגיל מס' 26

פתרו את השאלות הבאות. יש לסיים את התרגיל עד יום א' (8.3).

שאלה 1

נתונים שני מערכים, A ו-B, אשר מכילים מספרים שלמים. נתון שכל המספרים ב-A שונים זה מזה, וכל המספרים ב-B שונים זה מזה, אך ייתכן שמספר מסוים יופיע גם ב-A וגם ב-B. מטרתנו היא לבדוק האם A הוא תמורה (פרמוטציה - permutation) של B.

תארו אלגוריתם הפותר את הבעיה...

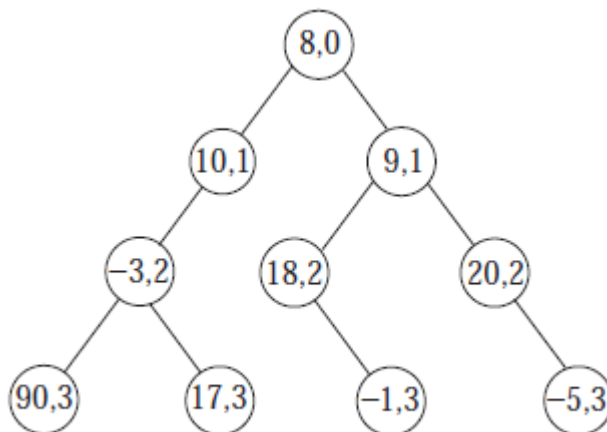
א. בסיבוכיות זמן ריצה $\Theta(n^2)$ במקרה הגרוע ביותר (W.C).

ב. בסיבוכיות זמן ריצה $\Theta(n \log n)$ במקרה הגרוע ביותר (W.C).

שאלה 2 (ממבחן של משרד החינוך)

מגדירים אלגוריתם הנקרא **האם-רמות-עולות-יורדות?** (T) המקבל עץ בינארי T לא ריק. בכל צומת בעץ שני ערכים – האחד הוא מספר שלם שהוא ערך הצומת, והאחר מציין את רמת הצומת. האלגוריתם מחזיר 'אמת' אם הערכים בכל רמה זוגית ממוינים בסדר עולה משמאל לימין וגם הערכים בכל רמה אי-זוגית ממוינים בסדר יורד משמאל לימין, אחרת – הפעולה מחזירה 'שקר'.

לדוגמא, עבור העץ T הבא:



האלגוריתם יחזיר 'אמת'.

כתבו אלגוריתם מילולי המבצע את **האם-רמות-עולות-יורדות?** (T).

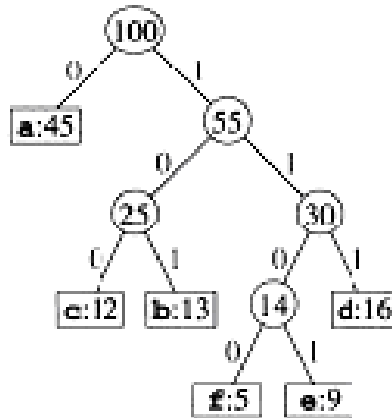
שאלה 3

פתרו את נוסחת הנסיגה הבאה על-ידי החלפת משתנים:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & , n < 32 \\ 2T(\sqrt[3]{n}) + \log_2 n & , n \geq 32 \end{cases}$$

שאלה 4

נתון עץ קידוד הופמן הבא:



א. פענחו את המחרוזת 10111101101100.

ב. הסבירו מדוע יש רק דרך אחת לפענח מחרוזת זו בקידוד הנתון. האם זה נכון לגבי כל קידוד? אם כן – הסבירו, אם לא – תנו דוגמא לקידוד שעבורו אין פענוח יחיד.

שאלה 5

נתון האי"ב $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ שהשכיחות של כל אות i בו מקיימת את התנאי 2^i , למעט האות 1 ששכיחותה 4. כלומר:

1. frequency = 4
2. frequency = 4
3. frequency = 8
4. frequency = 16
- ...
- n. frequency = 2^n

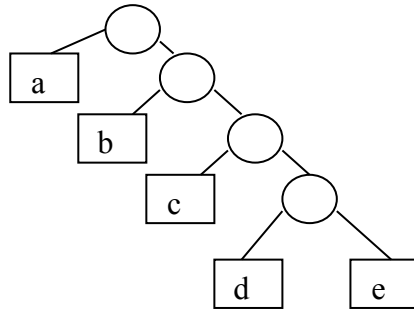
תארו את מבנה עץ הופמן שנוצר לשכיחויות אלו, והסבירו מדוע נוצר העץ באופן זה.

שאלה 6

נתון קובץ טקסט שמורכב כולו מאותיות הא"ב {a,b,c,d,e}, וידוע שהאותיות מסודרות משמאל לימין לפי שכיחות יורדת:

$$a.\text{frequency} > b.\text{frequency} > c.\text{frequency} > d.\text{frequency} > e.\text{frequency}$$

בוניס קוד הופמן עבור קובץ זה. ידוע שהאות e קיבלה את הקידוד 1111. הסבירו מדוע במקרה זה העץ שנבנה במהלך מציאת קוד הופמן חייב להיראות כך:



שאלה 7

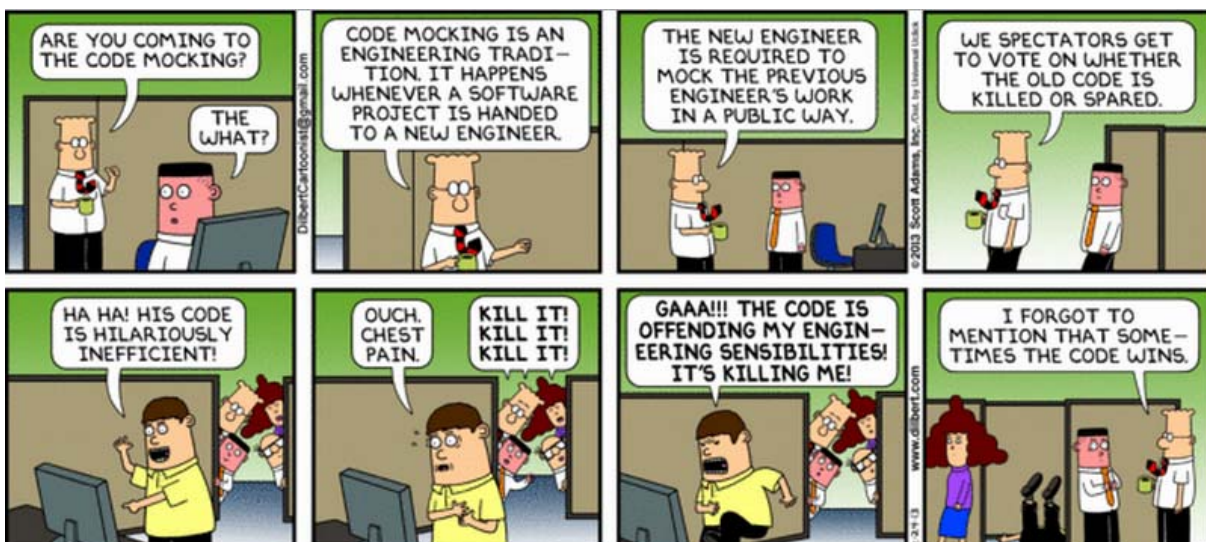
השתמשו במשפט שלמדנו (איזה?) כדי לפתור את נוסחת הנסיגה הלינארית האי-הומוגנית הבאה:

$$T(n) = 2T(n-1) + n \cdot 3^n + 5 \cdot 3^n$$

עם תנאי ההתחלה $T(i) = i$, עבור כל $0 \leq i \leq 2$ (כלומר: $T(0) = 0, T(1) = 1, T(2) = 2$).

שאלה 8 (רשות)

פתרו את נוסחת הנסיגה מהשאלה הקודמת, בעזרת שיטת הפרשים. הדרכה: עליכם לקבל שלוש משוואות שונות באופן הבא: משוואה א' תתקבל על-ידי הכפלת שני אגפי נוסחת הנסיגה ב-9; משוואה ב' תתקבל על-ידי הצבת $n+1$ בנוסחת הנסיגה המקורית, במקום n , ואז הכפלת שני האגפים ב-(-6); משוואה ג' תתקבל על-ידי הצבת $n+2$ בנוסחת הנסיגה המקורית, במקום n . כעת, חברו את שלושת המשוואות א' – ג'.



שאלה 9 (מבחן של משרד החינוך)

נתון האלגוריתם שלפניך:

סוד (T)

{האלגוריתם מקבל עץ בינרי T המכיל מספרים טבעיים ומחזיר זוג מספרים (X, N).

X מספר ממושי ו-N מספר שלם.

X1, X2 – משתני עזר מסוג ממושי, N1, N2 – משתני עזר מסוג שלם.

(1) אם עץ-דיק? (T), אזי בצע:

$$N \leftarrow 0 \quad (1.1)$$

$$X \leftarrow 0 \quad (1.2)$$

(2) אחרת בצע:

$$(X1, N1) \leftarrow \text{סוד (תת-עץ-שמאלי (T))} \quad (2.1)$$

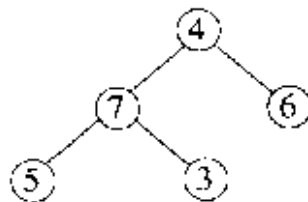
$$(X2, N2) \leftarrow \text{סוד (תת-עץ-ימני (T))} \quad (2.2)$$

$$N \leftarrow 1 + N1 + N2 \quad (2.3)$$

$$X \leftarrow (X2 * N2 + X1 * N1) / N \quad (2.4)$$

(3) החזר את (X, N).

א. נתון העץ הבינרי T שלפניך:



מה יחזיר האלגוריתם סוד עבור העץ הזה?

ב. הסבר באופן כללי מה מבצע האלגוריתם.

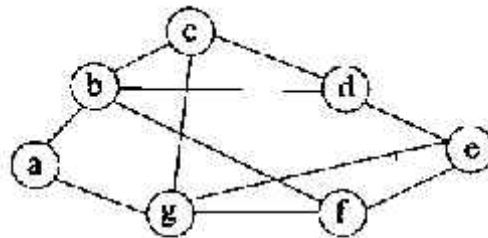
ג. אם שורה (2.2) תוחלף ל:

$$(2.2) \quad X2 \leftarrow 0, N2 \leftarrow 0$$

הסבר מה יבצע האלגוריתם.

קבוצת צמתים מתוך צומתי גרף תיקרא "קבוצה עיקרית", אם מכל צומת שלא נמצא בקבוצה יש קשת לצומת בתוך הקבוצה.

לדוגמה: עבור הגרף G



קבוצת הצמתים $\{a, d, f\}$ היא "קבוצה עיקרית" כי הצמתים בגרף שלא בקבוצה הם $\{b, c, e, g\}$. עבור b יש הקשת (b, a) , עבור c יש הקשת (c, d) , עבור e – הקשת (e, d) ועבור g – הקשת (g, f) .

- א. מצא "קבוצה עיקרית" נוספת לגרף G .
- ב. האם יש לגרף G "קבוצה עיקרית" שיש לה שני צמתים בלבד? אם כן – מצא את הקבוצה, אם לא – הסבר מדוע.
- ג. נסח תנאי המתאר לאילו גרפים תהיה "קבוצה עיקרית" שיש לה צומת אחד.
- ד. לפניך אלגוריתם "מצא" המקבל גרף G ומוצא עבורו "קבוצה עיקרית":

מצא (G)

L – רשימה ריקה (בסוף האלגוריתם L תכיל את ה"קבוצה העיקרית")

(1) כל עוד הגרף G אינו ריק, בצע:

(1.1) מצא צומת בגרף שדוגתו היא הגבוהה ביותר, והכנס אותו ל- V

(1.2) הוסף את V ל- L

(1.3) הורד מהגרף G את הצומת V , את כל הצמתים המחוברים אליו

בקשת ואת הקשתות המחוברות ביניהם.

האם אלגוריתם זה מוצא תמיד "קבוצה עיקרית" הקטנה ביותר? נמק.

שאלה 11

נתונה המשוואה הרקורסיבית הבאה: $T(n) = T(\sqrt[3]{n}) + f(n)$, המקיימת $T(1) = T(2) = 1$. האם קיימת פונקציה $f(n)$ כך שמתקיים $T(n) = \Theta(\log n)$? אם כן, הדגימו פונקציה כזו והראו שהיא מקיימת את הדרישה. אם לא, הוכיחו שלא קיימת פונקציה כזו.

שאלה 12

תהא $f(n)$ פונקציה המתארת זמן ריצה של אלגוריתם (כלומר, פונקציה שהיא מונוטונית-עולה ושהערכים שהיא מחזירה הם חיוביים). להלן טענות של שני סטודנטים:

טענתו של סטודנט A: אם $f(n) = O(f(\sqrt{n}))$ אזי בהכרח $f(n) = \Theta(1)$.

טענתו של סטודנט B: אם $f(n) = O(\sqrt{f(n)})$ אזי בהכרח $f(n) = \Theta(1)$.

בחרו את התשובה הנכונה מבין התשובות 1 – 4:

1. שני הסטודנטים צודקים בטענתם.
2. שני הסטודנטים אינם צודקים בטענתם.
3. סטודנט A צודק, וסטודנט B לא צודק.
4. סטודנט A אינו צודק, וסטודנט B צודק.

שאלה 13

נתונה פונקציית זמן הריצה של אלגוריתם מסויים, הפועל על קלט שגודלו n :

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 2$$

סיבוכיות זמן הריצה של קטע הקוד הנתון כפונקציה של n היא:

1. $\Theta(\log \log(n))$
2. $\Theta(\log n)$
3. $\Theta(\sqrt{n})$
4. $\Theta(\log^2 n)$

שאלה 14

לפניכם נוסחאות נסיגה לינאריות אי-הומוגניות. פתרו אותם בעזרת משפט 3:

א. $T(n) = T(n-1) + 2T(n-2) + 2 \cdot 3^{n-2}$ עם תנאי ההתחלה $T(0) = 1, T(1) = 2$.

ב. $T(n) = T(n-1) + 2T(n-2) + 2^{n-1}$ עם תנאי ההתחלה $T(0) = 1, T(1) = 3$.

ג. $T(n) = T(n-1) - T(n-2) + 2^{n-2}$ עם תנאי ההתחלה $T(0) = T(1) = 1$.

שאלה 15

א. נתון הא"ב {A,B,C,D,E,F} ונתונה טבלת השכיחויות הבאה:

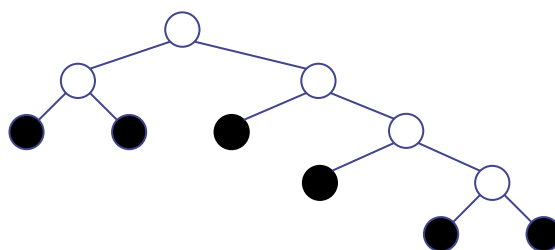
A	B	C	D	E	F
17,000	15,000	6,000	7,000	9,000	3,000

מהו מספר הסיביות הדרוש לקידוד קובץ בגודל 57,000 תווים אם משתמשים בקוד באורך קבוע (fixed-length) ואם משתמשים בקוד הופמן?

ב. בנו עץ קידוד הופמן עבור טבלת השכיחויות הנ"ל, וקודדו את המחרוזת הבא: DEBACFA.

שאלה 16

נתון הא"ב {a,b,c,d,e,f}. תנו דוגמא לשש שכיחויות (אחת עבור כל אחת מן האותיות), כך כשהפעלת האלגוריתם HUFFMAN-CODING תחזיר עץ בינארי בעל המבנה הכללי הבא –



שימו לב כי תיתכן יותר מתשובה אחת.

שאלה 17

א. בנו את עץ קידוד הופמן המתקבל עבור סדרת השכיחויות הבאה, המבוססת על 8 המספרים הראשונים בסדרת פיבונצ'י:

a: 1, b: 1, c: 2, d: 3, e: 5, f: 8, g: 13, h: 21

ב. האם תוכלו להכליל את תשובתכם, ולתאר את עץ קידוד הופמן המתקבל כאשר השכיחויות הן n המספרים הראשונים בסדרת פיבונצ'י?

שאלה 18

פתרו שאלות העוסקות בשימוש במשפטים 3 ו-4 לגבי משוואות נסיגה לינאריות אי-הומוגניות, מתוך בחינות חיצוניות של משרד החינוך:

- א. בחינת תשס"ז (2007), שאלה 3, סעיף ג'.
- ב. בחינת תשס"ט (2009), שאלה 3, סעיף ו'.
- ג. בחינת תש"ע (2010), שאלה 4, סעיף ג'.
- ד. בחינת תשע"א (2011), שאלה 3, סעיף ג'.
- ה. בחינת תשע"ב (2012), שאלה 4, סעיף ג'.

שאלה 19 (מתוך מבחן חיצוני במבני נתונים, אביב תשנ"ז)

א. בטבלה הבאה נתונים סימנים והשכיחויות של כל אחד מהם:

שכיחות	סימן
0.45	A
0.07	B
0.12	C
0.08	D
0.15	E
0.13	F

הפעל את אלגוריתם הופמן על קבוצת הסימנים ועל השכיחויות שלהם ושרטט את העץ המתקבל. ציין מהם הקודים שניתנו לכל אחד מהסימנים בטבלה.

ב. שני תלמידים כתבו, כל אחד לחוד, תכנית המוצאת קוד הופמן. שתי התכניות הורצו עם קלטים שונים (ושונים מזה שבטבלה בסעיף א'). פלט התכנית של תלמיד א':

- A - 11
- B - 0
- C - 110
- D - 111

פלט התכנית של תלמיד ב':

- A - 0
- B - 10
- C - 111
- D - 1101

האם התכניות של התלמידים נכונות? נמק.