



מכללת אורט כפר-סבא

מבני נתונים ויעילות אלגוריתמים

תרגיל מס' 27

פתרו את השאלות הבאות. יש לסיים את התרגיל עד יום א' (8.3).

שאלה 1

א. נתונה פונקציית זמן הריצה של אלגוריתם מסוים, הפועל על קלט שגודלו n :

$$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) + 5n^5 + 2 + 4^n$$

מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם?

1. $\Theta(n^7)$

2. $\Theta(n^6)$

3. $\Theta(4^n)$

4. $\Theta(n^8 \cdot 4^n)$

ב. נתון ביטוי בצורת prefix: $A+BDC$ / * . ביטוי ה-postfix השקול הוא:

1. $ABC+*D/$

2. $ABCD+*/$

3. $DCB+A*/$

4. $ABD+*C/$

ג. מעוניינים לכתוב שגרה בשם $\text{partition}(S,n,z,S1,S2)$ המקבלת קבוצה S בת n איברים,

וכן איבר z . השגרה תבצע חלוקה של הקבוצה S לשתי קבוצות, $S1$ ו- $S2$, כך שב- $S1$ יהיו

כל האיברים הקטנים מ- z או השווים ל- z , וב- $S2$ יהיו האיברים הגדולים מ- z .

ניתן לממש את partition באמצעות אלגוריתם יעיל שסיבוכיות זמן הריצה שלו היא:

1. $\Theta(\log n)$

2. $\Theta(n)$

3. $\Theta(n \cdot \log n)$

4. $\Theta(n^2)$

ד. לפניך קטע של קוד :

```

a = 2;
while (a < n) {
  for (i = 0; i < n; i++)
    for (j = n; j >= i; j--)
      S;
  while (i > 0) i = i - n/16;
  a *= 5;
}

```

נתון כי S הוא משפט פשוט והזמן הדרוש לביצועו הוא $\Theta(1)$.
 כמו כן נתון כי S אינו משנה את ערכם של המשתנים i, j, a ו- n .
 מהי סיבוכיות זמן הריצה של קטע הקוד הנתון כפונקציה של n ?

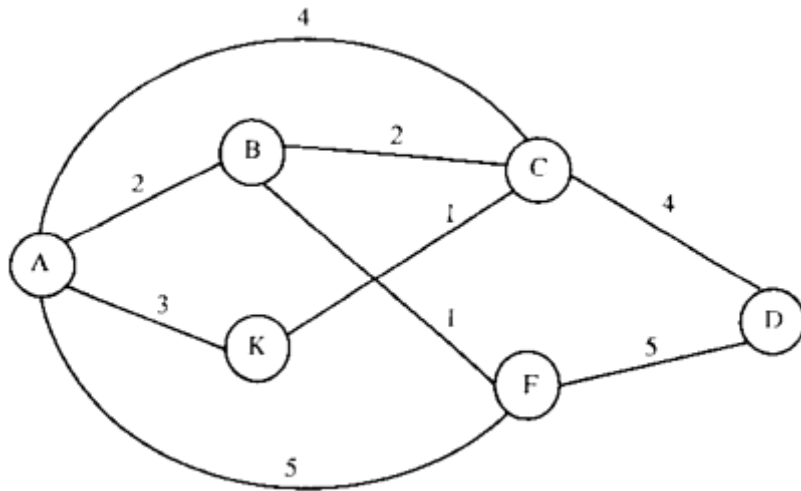
1. $\Theta(n^2 \cdot \log \log n)$

2. $\Theta(n \cdot \log^2 n)$

3. $\Theta(n^2 \cdot \log n)$

4. אף תשובה אינה נכונה

ה. נתון הגרף G הבא :



לפניך ארבע טענות המתייחסות לגרף G. שלוש מתוכן נכונות, ואחת שקרית. קבע איזו מן הטענות הבאות אינה נכונה :

1. אם נפעיל את האלגוריתם של Dijkstra על הגרף G, למציאת מסלול קצר ביותר בין הקודקודים A ו-D, אז אורך המסלול שנקבל יהיה 8.

2. בגרף G יש לא פחות מארבעה מעגלים פשוטים באורך 4.

3. אם נפעיל את האלגוריתם של Prim למציאת עץ פורש מינימלי בגרף G, ונבחר את הקודקוד F להיות קודקוד ההתחלה, אז משקל העץ שנקבל יהיה 10.

4. בגרף G יש מעגל אוילר.

1. נתונה פונקציית זמן הריצה של אלגוריתם מסוים, הפועל על קלט שגודלו n :

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{9}\right) + \sqrt{n} \cdot \log n$$

מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם?

1. $\Theta(\sqrt{n})$

2. $\Theta(\sqrt{n} \cdot \log n)$

3. $\Theta(\sqrt{n} \cdot \log^2 n)$

4. אף תשובה אינה נכונה

2. לפניך האלגוריתם הבא, המקבל כקלט גרף פשוט, קשיר **מכוון וממושקל** $G = (V, E)$, וכן זוג קודקודים $s, t \in V$. מטרת האלגוריתם היא להגיע מ- s ל- t דרך המסלול המכוון הקל ביותר. כזכור, משקל של מסלול מכוון מוגדר בתור סכום כל המשקלים של הקשתות המכוונות המרכיבות את המסלול.

האלגוריתם:

צעד 1: $v = s$

צעד 2: כל עוד $v \neq t$, בצע:

2.1 אם t הוא אחד השכנים של v , אזי:

2.1.1 $v = t$

2.2 אחרת:

2.2.1 בחר שכן u של v , כך שמשקל הקשת (v, u) הוא מינימלי.

2.2.2 $v = u$

האלגוריתם שלעיל...

1. משיג תמיד את מטרתו.

2. משיג תמיד את מטרתו, בתנאי שאין שתי קשתות בעלות אותו המשקל הנוגעות היוצאות שתייהן מאותו הקודקוד.

3. לא משיג את מטרתו, אולם אם נמחק את שורות 2.1 ו-2.1.1, הוא יפעל כראוי.

4. לא משיג את מטרתו.

ח. נתונה פונקציית זמן הריצה של אלגוריתם מסוים, הפועל על קלט שגודלו n :

$$T(n) = 32T\left(\frac{n}{2}\right) + n^4$$

מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם?

1. $\Theta(n^4)$

2. $\Theta(n^4 \cdot \log n)$

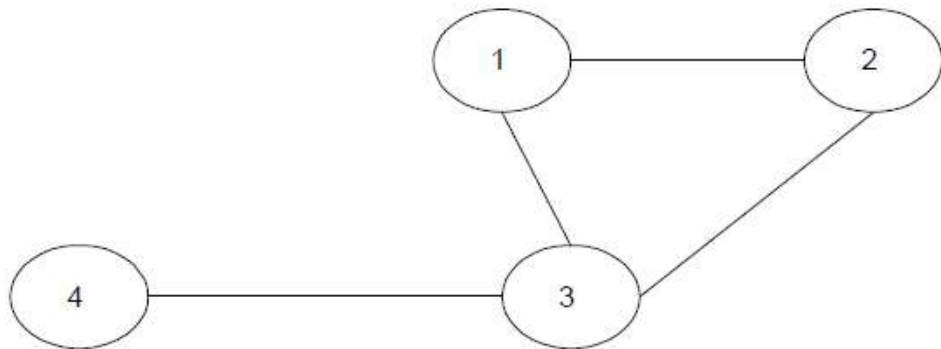
3. $\Theta(\log^5 n)$

4. אף תשובה אינה נכונה

שאלה 2 (ממבחן של משרד החינוך)

נתון גרף $G = (V, E)$ כאשר V קבוצת הקדקודים ו- E קבוצת הצלעות.
 קבוצת קדקודים V' , $(V' \subseteq V)$, נקראת כיסוי קדקודים, אם כל צלע בגרף "מחוברת"
 מצד אחד לפחות לקדקוד שב- V' . כלומר, אם (a, b) צלע ב- E אז a או b שייכים ל- V' .
 (קבוצת הקדקודים V' "מכסה" את כל צלעות הגרף).

דוגמה:



קבוצת הקדקודים $\{3, 2\}$ מהווה כיסוי קדקודים, כיוון שהצלעות $(3,1), (2,3), (3,4)$ מחוברות לקדקוד 3, הצלע $(1,2)$ מחוברת לקדקוד 2, ואין יותר צלעות בגרף.

לפניך אלגוריתם שבעזרתו אפשר למצוא כיסוי קדקודים V' לגרף נתון $G = (V, E)$.
האלגוריתם:

צעד 1: אפס את V' .

צעד 2: העתק את G ל- R .

צעד 3: אם R אינו מכיל צלעות, סיים.

צעד 4: מצא את הקדקוד בעל הדרגה הגבוהה ביותר שנמצא ב- R והוסף אותו ל- V' .

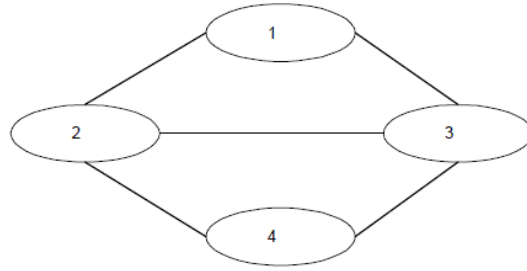
(אם יש יותר מקדקוד אחד כזה, בחר אחד כרצונך.)

צעד 5: מחק מ- R את הקדקוד שמצאת בצעד-4 ואת כל הצלעות המחוברות אליו.

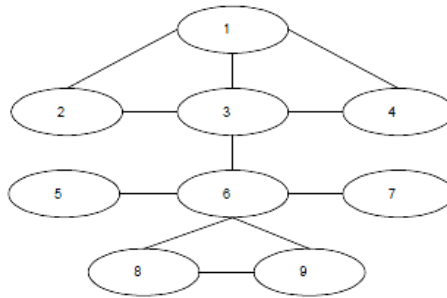
צעד 6: חזור לצעד 3.

א. הפעל את האלגוריתם על כל אחד מהגרפים שלהלן ורשום בעבור כל גרף בנפרד מהו כיסוי הקודקודים שהתקבל. במחברת הבחינה העתק רק את מספר הגרף ולצידו רשום את קבוצת הקודקודים מהווה כיסוי קודקודים בעבור הגרף.

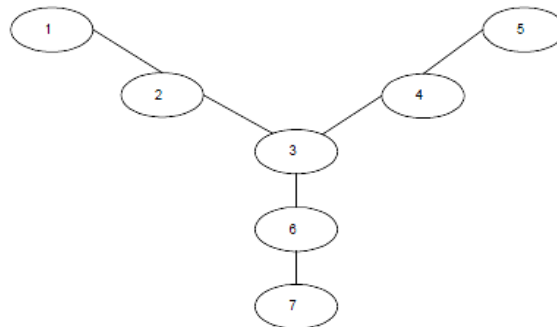
1.77



2.77



3.77



ב. כיסוי קודקודים נקרא כיסוי קודקודים מינימלי, אם הוא קבוצה קטנה ביותר של קודקודים שמהווה כיסוי קודקודים. האם האלגוריתם שהוצג מוצא כיסוי קודקודים מינימלי? נמק.

שאלה 3

נתונה סדרה S של n מספרים שלמים **שונים** זה מזה. נגדיר פעולות על הסדרה S :

סיבוכיות זמן הריצה של הפעולה במקרה הגרוע ביותר	תיאור הפעולה	שם הפעולה
$\Theta(n)$	פעולה היוצרת סדרה ריקה S .	Init(S)
$\Theta(n)$	פעולה המחזירה ערך בוליאני 'אמת' אם הסדרה S מכילה איבר x , אחרת – היא מחזירה ערך בוליאני 'שקר'.	Find(S,x)
$\Theta(n)$	פעולה המוסיפה איבר x לסדרה S .	Insert(S,x)
$\Theta(n)$	פעולה המוציאה איבר x מהסדרה S .	Delete(S,x)
$\Theta(n)$	פעולה המוצאת ומחזירה את האיבר ה- k הקטן ביותר מבין איברי הסדרה S , כלומר – מוצאת את ערך המיקום ה- k בסדרה S .	Select(S,k)
$\Theta(n)$	פעולה המחלקת את האיברים של הסדרה S שאורכה n , לשתי סדרות, S_1 ו- S_2 , שאינן ממוינות בהכרח. בסדרה האחת, S_1 , יהיו איברים הקטנים מ- z או השווים ל- z , ובסדרה האחרת, S_2 , יהיו האיברים הגדולים מ- z .	Partition(S,n,z,S_1,S_2)
$\Theta(n \log n)$	פעולה אשר ממיינת את n האיברים של הסדרה S באמצעות האלגוריתם למיון-מיזוג.	Merge-Sort(S,n)
$\Theta(n)$	פעולה אשר מציגה כפלט את n האיברים של הסדרה S .	Print(S,n)

- שים לב!** 1. אין צורך לכתוב שגרות למימוש הפעולות הנתונות. הנח שהן כבר כתובות.
 2. סיבוכיות זמן הריצה של כל אחת מהפעולות הנתונות נקבעה על-סמך הייצוג של טיפוס הנתונים המופשט "סדרה", והייצוג הזה מוסתר.
 3. אין להניח שום הנחה לגבי האופן שבו מיוצג טיפוס הנתונים המופשט "סדרה".
 4. אם הייצוג של טיפוס הנתונים המופשט "סדרה" ישתנה, אז גם סיבוכיות זמן הריצה של פעולות הממשק עשויה להשתנות, אך עדיין – טיפוס הנתונים המופשט "סדרה" יתמוך בכל פעולות ממשק אלו.

א. לפניך קטע קוד אשר מוצא וממיין את i האיברים הגדולים ביותר בסדרה S , בסיבוכיות

$$. \frac{n}{\log n} \geq i, \Theta(n), \text{ כאשר נתון כי } i$$

בקטע הקוד חסרים שני ביטויים, המסומנים בספרות בין סוגריים עגולים.

```
z = ____ (1) ____;
Partition(S, n, z, S1, S2);
____ (2) ____;
Print(S2, i);
```

ב. נתונה שתי סדרות, M ו- N , אשר מכילות m ו- n איברים, בהתאמה. יש לבחור מבנה נתונים מתאים כדי שהמימוש של השגרה $\text{Intersection}(M, N)$ (המקבלת כקלט שתי סדרות M ו- N , ומחזירה את קבוצת החיתוך שלהן, כלומר את הקבוצה $M \cap N$) יתבצע בזמן $\Theta(n \cdot \log m)$.

לפניך אלגוריתם המממש את השגרה Intersection , והעושה שימוש במבנה נתונים מסוים. שימו לב להערה 4 בעמוד הקודם!

באלגוריתם חסרים שלושה ביטויים, המסומנים בספרות בין סוגריים עגולים. רשום במחברת הבחינה את מספרי הביטויים החסרים (1) – (3) בלבד, בסדר עולה, וכתוב ליד כל מספר את הביטוי החסר שהוא מייצג.

צעד 1: לצורך מימוש 'סדרה' נבחר להשתמש במבנה הנתונים הזה:
 _____ (1) _____ (יש לציין במפורש את שם מבנה הנתונים, כגון:
 רשימה מקושרת מעגלית, מחסנית, וכו')

צעד 2: בצע את הפעולה $\text{Init}(S)$, כך ש- S היא סדרה מאותחלת וריקה.

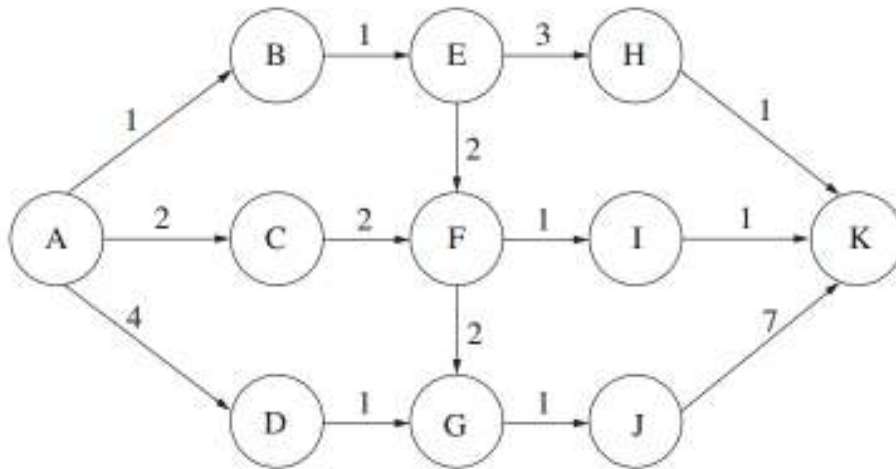
צעד 3: עבור כל איבר y השייך לסדרה N (כלומר: לכל $y \in N$), בצע:

_____ (2) _____ אם
 _____ (3) _____ אזי

צעד 4: החזר את הסדרה S .

שאלה 4 (ממבחן של משרד החינוך)

א. לפניך רשת $G = (V, E)$.



מצא את כל המסלולים הקצרים ביותר מקדקוד A לקדקוד K ברשת הנתונה.
תאר כל אחד מן המסלולים תיאור סכמתי.

ב. נוסף לרשת G, נתון עץ פורש מכון T שמחבר את כל קדקודי הרשת ואינו מכיל מעגלים.
לפניך אלגוריתם:

צעד 1: הפעל את האלגוריתם של דיקסטר מקדקוד נתון בעץ T.

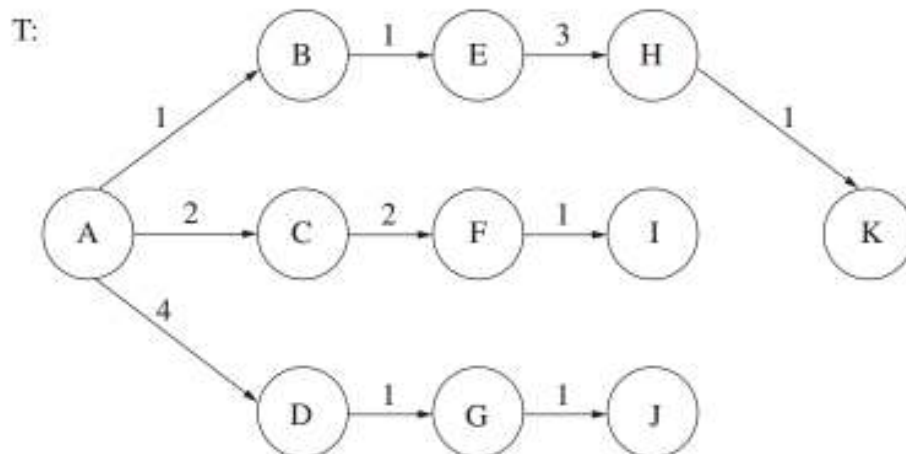
צעד 2: בעבור כל קשת מכוונת $e = (u, v)$, השייכת ל-E ברשת G ואינה שייכת לעץ T, בצע:

אם $d[v] > d[u] + w(e)$ – החזר "שקר".

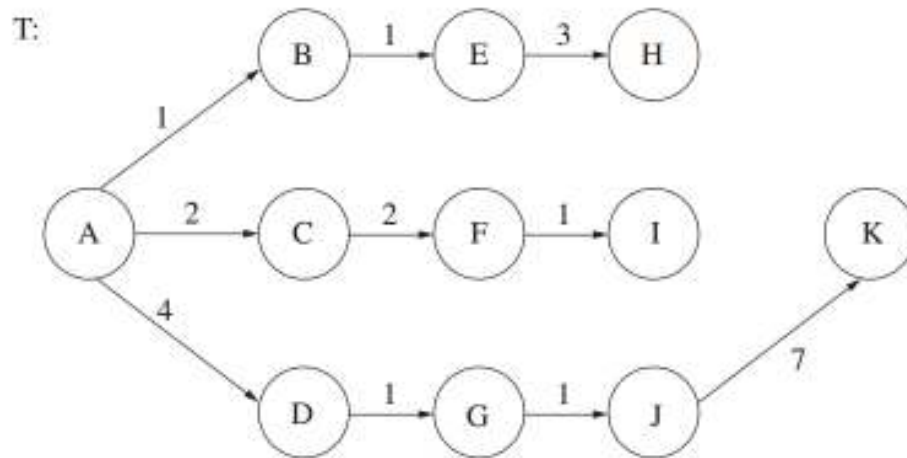
($d[v]$ מציין את אורך המסלול הקצר ביותר מקדקוד מקור לקדקוד v.)

צעד 3: החזר "אמת".

(1) מהו הערך המוחזר לאחר הפעלת האלגוריתם על הרשת הנתונה G ועל העץ T שלפניך, החל מקדקוד A? כתוב את כל הצעדים של האלגוריתם ואת התוצאה המתקבלת מכל צעד.



(2) מהו הערך המוחזר לאחר הפעלת האלגוריתם על הרשת הנתונה G ועל העץ T שלפניך, החל מקדקוד A? כתוב את כל הצעדים של האלגוריתם ואת התוצאה המתקבלת מכל צעד.



שאלה 5 (מבחן של משרד החינוך)

בשאלה זו שני סעיפים, א-ב, שאין קשר ביניהם. ענה על שניהם.

א. $G = (V, E)$ הוא גרף לא מכוון המיוצג על ידי מטריצת הסמיכויות שלפניך:

	a	b	c	d	e
a	0	1	0	1	0
b	1	0	1	0	1
c	0	1	0	1	0
d	1	0	1	0	1
e	0	1	0	1	0

- (1) סרטט את הגרף G המיוצג על ידי המטריצה הנתונה.
- (2) האם הגרף G הוא גרף שלם? נמק את תשובתך.
- (3) כמה רכיבי קשירות (Connected Components) יש בגרף הנתון, ומה הם?
- (4) מצא שני מסלולים קצרים ביותר מקדקוד a לקדקוד e.
- תאר כל אחד מן המסלולים תיאור סכמתי.
- (5) מצא בגרף G מעגל המתחיל בקדקוד a ומכיל 4 קשתות בלבד.
- תאר מעגל זה תיאור סכמתי.

ב. (אין קשר לסעיף א.)

$G = (V, E)$ הוא גרף מכוון המיוצג על ידי רשימת הסמיכויות שלפניך:

a	→ e → d →
b	→ a →
c	→ d →
d	→ c →
e	→ b →

(1) סרטט את הגרף G המיוצג על ידי הרשימה הנתונה.

(2) כמה רכיבי קשירות חזקה (רק"חים – Strong Connected Components) יש בגרף G , ומה הם?

(3) i. העתק למחברתך את הטבלה שלפניך.

הפעל אלגוריתם סריקה לעומק (DFS) על הגרף G , החל מקדקוד a .

בהפעלת האלגוריתם DFS חשב בעבור כל קדקוד u את $d[u]$ ואת $f[u]$.

$d[u]$ מציין את מועד הגילוי של הקדקוד u בעת הסריקה,

ור $f[u]$ מציין את המועד של סיום הטיפול בקדקוד u .

כתוב את תוצאות החישובים בטבלה שבמחברתך.

קדקוד u	a	b	c	d	e
$d[u]$					
$f[u]$					

ii. סרטט במחברתך רק את העץ הפורש (DFS)/היער הפורש (DFS) שמתקבל.

התבסס על הייצוג הנתון ברשימת הסמיכויות.

שאלה 6

שאלות אמריקאיות החוזרות על עצמן במבחנים חיצוניים רבים של משרד החינוך, הן כאלה העוסקות בנוסחאות רקורסיביות הקשורות בסדרות חשבוניות והנדסיות. פתרו את הסעיפים הבאים (שאת כולם כבר פתרנו בכיתה), השוו את פתרונותיכם לאלה של חבריכם, והקפידו לוודא שהתשובה הנכונה כתובה אצלכם.

א. סכום סדרה חשבונית – בחינה מ-2011, שאלה 2, סעיף ב'.

ב. סכום סדרה הנדסית – בחינה מ-2012, שאלה 3, סעיף ב'.

ג. נסו לבנות נוסחה רקורסיבית לאיבר הכללי של סדרה חשבונית.

ד. נסו לבנות נוסחה רקורסיבית לאיבר הכללי של סדרה הנדסית.

שאלה 7 (ממבחן של משרד החינוך)

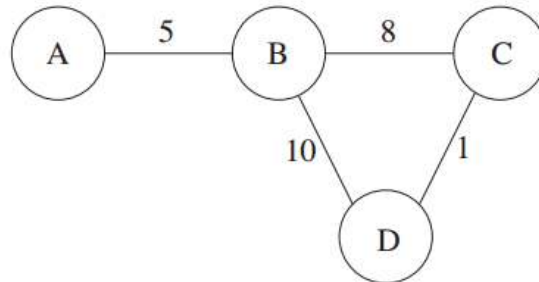
בשאלה זו שני סעיפים, א-ב, שאין קשר ביניהם. ענה על שניהם.
א. יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון המיוצג על ידי מטריצת הסמיכויות שלפניך:

a	a	b	c	d	e
b	0	1	1	0	0
c	1	0	1	0	0
d	0	0	1	0	1
e	0	0	0	1	0

- (1) סרטט את הגרף G המיוצג על ידי המטריצה.
- (2) כמה רכיבי קשירות (Connected Components) יש בגרף הנתון, ומה הם?
- (3) הסר קשת אחת מהגרף G שסרטטת, כך שמספר רכיבי הקשירות לא ישתנה. ציין את הקשת שהסרת.
- (4) קשת בגרף תיקרא "קשת מפרידה" אם הסרתה מהגרף תגדיל את מספר רכיבי הקשירות ב-1. ציין "קשת מפרידה" אחת בגרף G . סרטט את הגרף שמתקבל לאחר הסרת הקשת שציינת.

ב. (אין קשר לסעיף א.)

לפניך רשת:



- (1) מצא את המסלולים הקצרים ברשת הנתונה לפי האלגוריתם של דיקסטרה, מקדקוד A לכל קדקוד אחר ברשת, וצייר את התיאור הסכמתי של עץ המסלולים הקצרים. בעבור כל קדקוד ברשת, רשום את אורך המסלול הקצר ביותר מקדקוד A עד אליו.
- (2) מוסיפים קשת לא מכוונת (A, D) לרשת הנתונה. מה צריך להיות משקלה של הקשת, כדי שהמסלולים הקצרים מקדקוד A לכל אחד מהקדקודים האחרים לא ישתנו?

שאלה 8

שימו לב שחלק מהשאלות במבחנים החיצוניים דורשים היכרות עם הפונקציות הסטנדרטיות לעבודה עם קבצים (fread, fwrite, fseek,...). פתרו שאלות אלה:

- א. חלק II של שאלה 2 מהבחינה החיצונית של משרד החינוך משנת תשס"ט (2009).
- ב. שאלה 4 מהבחינה החיצונית של משרד החינוך משנת תשס"ד (2004). מבנה הנתונים המתואר בשאלה זו נקרא **עץ B** (ובאנגלית: **B-Tree**), וכדאי שתכירו את המושג הזה.

הצעה: הביאו איתכם למבחנים במבני נתונים ויעילות אלגוריתמים גם חומר עזר רלוונטי בשפת סי (חומר בנושא עבודה עם קבצים, הקצאה דינאמית של זיכרון, מבנה struct – איגוד – union, ופונקציות סטנדרטיות על מחרוזות).

שאלה 9

פתרו את חלק I של שאלה 1 מהבחינה החיצונית של משרד החינוך משנת תשס"ז (2007).

קראו את הפיסקה הראשונה של השאלה, והסבירו: מדוע בהכרח מתקיים $M \leq K^2$?

כדי לפתור את השאלה ביעילות, שרטטו את הטבלה הבאה (שכל עמודה שלה מתאימה למימוש מסוים, וכל שורה שלה מתאימה לפעולת ממשק מסוימת). מלאו את הטבלה תוך כדי קריאת השאלה (בהצטלבות בין שורה לבין עמודה, רשמו את סיבוכיות זמן הריצה של הפעולה הנתונה עבור המימוש הנתון). רק לאחר מילוי הטבלה, נסו לגשת לשאלות האמריקאיות בסעיפים א' – ג'.

מבנה D	מבנה C	מבנה B	מבנה A	
				insert(R)
				retrieve(x)
				retrieveMin()
				deleteMin()

הניחו שבמבנים B ו-C – אם יש מפתח שעבורו אין רשומות, אז לא יופיע עבורו צומת בעץ T. במילים אחרות: כל צומת בעץ מכיל מצביע P_i לראש רשימה מקושרת שהיא **לא ריקה**, ואם היא הופכת לריקה (למשל, בעקבות מחיקת כל הרשומות הנמצאות בה) – אז צריך להסיר את הצומת הזה מהעץ.

כמו כן, הניחו כי במבנה D – המערכים D_i הם כולם לא ריקים. כלומר, המערך D כולל אך ורק מערכים בהם יש נתון, והוא לא כולל ערכי NULL. אם מערך D_i מסוים הופך לריק (למשל, בעקבות מחיקת כל הרשומות הנמצאות בו) – אז צריך להזיז איברים במערך D, כך שהתא הזה יתמלא בנתון.